引文格式:张世美,王振杰,孙振,等.附加浮标基线约束的GNSS/A定位联合平差方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(3):528-534.DOI:10.13203/j.whugis20220190

Citation: ZHANG Shimei, WANG Zhenjie, SUN Zhen, et al. A Joint Adjustment Method with Between-Buoy Baseline Constraint for GNSS/A Underwater Precise Positioning[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, 50(3):528-534.DOI:10.13203/j.whugis20220190

附加浮标基线约束的GNSS/A定位联合平差方法

张世美[1] 王振杰[1] 孙 振[1] 聂志喜[1] 李伟嘉[1]

1 中国石油大学(华东)海洋与空间信息学院,山东 青岛,266580

摘 要:为解决海面换能器位置误差对海底大地控制点定位精度的影响,将海面浮标和海底应答器均作为未知点,并把海面浮标间的基线信息作为约束条件,提出了附加浮标基线约束的GNSS/A(global navigation satellite system/acoustic)定位联合平差方法。首先,利用海面浮标间基线信息构建互测距方程,把海面换能器位置作为虚拟观测,与水下声学测距共同组成联合函数模型进行解算;然后,基于方差分量验后估计理论,对海面浮标位置、声学测距和浮标基线3类观测值进行准确的权重配比;最后,采用模拟数据进行验证。实验结果表明,所提方法的定位精度比传统定位方法提高了17.5%~46.3%,比联合平差方法提高了16.5%~45.8%。

关键词:GNSS/A;浮标基线约束;方差分量估计;联合平差

中图分类号:P229 **文献标识码**:A **收稿日期**:2024-03-10

DOI:10.13203/j.whugis20220190 **文章编号**:1671-8860(2025)03-0528-07

A Joint Adjustment Method with Between-Buoy Baseline Constraint for GNSS/A Underwater Precise Positioning

ZHANG Shimei[1] *WANG Zhenjie*[1] *SUN Zhen*[1] *NIE Zhixi*[1] *LI Weijia*[1]

1 College of Oceanography and Space Informatics, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266580, China

Abstract: **Objectives**: To mitigate the impact of acoustic transducers' coordinate errors on the positioning accuracy of undersea geodetic control points, an improved joint adjustment method incorporating between-buoy baseline constraints is proposed for global navigation satellite system/acoustic (GNSS/A) underwater precise positioning system integrated with a moored buoy observation system. This method treats both the surface buoy and the seafloor transponder as unknown points, using the mutual ranging information between GNSS buoys as constraints. **Methods**: First, the mutual ranging equation is formulated based on the baseline information between buoys, and the positions of the acoustic transducers provided by GNSS positioning are introduced as virtual observations. These are combined with underwater acoustic ranging data to form a joint functional model for solving the equations. Then, to balance the covariance matrices of buoy positions, baseline observations, and acoustic observations, variance component estimation is applied to improved joint adjustment process. This step accurately determines the weight matrices for the three types of observations. Finally, the proposed method is verified using simulation data. **Results**: Experimental results indicate that the proposed method significantly enhances the positioning accuracy of seafloor transponders. The positioning accuracy is improved by 17.5% to 46.3% compared with the conventional positioning method, and by 16.5% to 45.8% compared with the joint adjustment method. **Conclusions**: The simulation results further demonstrate that the proposed method outperforms the other two methods, showcasing its superior performance in undersea geodetic control point positioning.

基金项目:青岛海洋科学与技术试点国家实验室"问海计划"(2021WHZZB1000,2021WHZZB1001);国家自然科学基金(42174020)。

第一作者:张世美,博士生,研究方向为水下导航与定位。zhangshimei415@163.com

通信作者:王振杰,博士,教授。sdwzj@upc.edu.cn

Key words: GNSS/A; between-buoy baseline constraint; variance component estimation; joint adjustment

海底大地控制网是海洋定位与导航技术的基础设施,主要采用GNSS/A(global navigation satellite system /acoustic)定位技术,借助GNSS浮标平台实施水下声呐测距,来实现海底大地控制点的精确标定[1-3]。由于复杂的海洋环境和水声声呐测距技术的限制,现有的数据处理方法尚不能够满足精确标定海底大地控制点的需求[4-5]。2019年国际大地测量协会正式设立了海洋大地测量工作组,以推动海洋空间基准与水下定位技术的发展,提高海底大地控制点的定位精度。

近年来,学者们先后发展了航迹优化、差分定位和深度约束等技术手段,来提高海底大地控制点的定位精度。航迹优化提高了海底大地控制点的平面精度,但高程方向的定位精度仍有待提升[6-7]。对声呐观测值进行差分能够削弱观测值间的共模误差,提高海底大地控制点的定位精度[8-11]。基于压力计提供的深度值,提出了附加深度约束的水下定位方法,提高了海底大地控制点的垂直方向的定位精度[12-15]。但是,上述方法在估计海底大地控制点的位置时,均忽略了海面换能器的位置误差[16]。海面换能器位置主要由GNSS定位技术确定,在不同历元具有不同的定位精度,这表明海面换能器位置不可避免地存在定位误差。若忽略海面换能器的位置误差,在平差过程中会将海面浮标位置的不确定信息传递到海底,降低海底大地控制点的定位精度。将海面换能器和海底应答器都当作未知参数,提出了顾及海面位置误差的水下联合平差方法[16],减弱了海面换能器位置误差对水下定位的影响。但该方法没有考虑海面浮标间高精度的基线信息[17]。因此,应将浮标间高精度的基线信息作为约束纳入到观测方程,发展附加浮标基线约束的水下联合平差方法,来进一步提高海底大地控制点的定位精度。

1　传统GNSS/A定位方法

GNSS/A水下定位技术借助GNSS浮标平台实施水下声呐测距来精确标定海底大地控制点的位置。如图1所示,假设海平面布设了$n(n\geqslant 4)$个GNSS浮标,可通过精密单点定位或者后处理差分定位技术进行定位。根据GNSS浮标和声学换能器的几何关系,可以计算声学换能器的位置。声学换能器向海底应答器发射询问信号并接收应答信息,记录声信号的单向传播时间,借助声速剖面数据,计算声学换能器至海底应答器

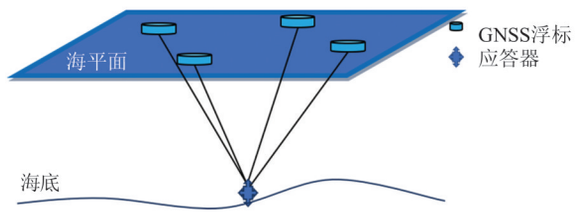


图1　基于海面浮标的GNSS/A定位示意图

Fig. 1　Sketch Map of GNSS/A Underwater Positioning Based on Surface Buoy

的传播距离。若忽略海面换能器的位置误差,声学测距线性化观测方程的向量表达式为:

$$L=B\mathrm{d}\boldsymbol{x}^q+\varepsilon \tag{1}$$

式中,L为声学测距观测值与测距计算值的差值;B为对应海底应答器的设计矩阵;$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^q$为海底应答器坐标的改正数;$\varepsilon$为观测误差。根据最小二乘平差法,则可计算海底应答器的坐标改正量为:

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^q=(B^{\mathrm{T}}P_{hq}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{hq}L \tag{2}$$

式中,P_{hq}为声学观测值的权矩阵。海底应答器的坐标为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}^q=\boldsymbol{x}^q+\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^q \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{x}^q=[x^q,y^q,z^q]^{\mathrm{T}}$为海底应答器的坐标。

传统GNSS/A定位方法认为海面换能器的位置是没有误差的已知值,但是由GNSS定位提供的海面换能器不可避免地存在定位误差,各个历元的定位精度也不相同。若忽略海面换能器的位置误差,在平差过程中会将海面浮标位置的不确定信息传递到海底,降低海底应答器的定位精度。为消除声学换能器位置误差对水下定位的影响,文献[16]提出了顾及海面位置误差的水下联合平差模型,提高了海底应答器的定位精度,但该方法没有考虑高精度的浮标基线观测信息。根据精密单点定位技术定位海面换能器的位置精度为15~20 cm,但由相对定位提供的浮标基线观测信息精度为厘米级,甚至可以达到毫米级。将高精度的浮标基线信息作为约束条件纳入到观测方程中,可进一步提高海底应答器的定位精度。

2　基于浮标基线约束的联合平差估计方法

2.1　附加浮标基线约束的联合平差函数模型

将海面浮标和海底应答器的位置均视为未知参数,则线性化后的观测方程为:

$$L=A\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h+B\mathrm{d}\boldsymbol{x}^q+\varepsilon \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{A}$为对应海面浮标的设计矩阵;$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h$为浮标坐标改正数。

将GNSS声学定位提供的海面浮标位置作为虚拟观测,则观测方程为:

$$\boldsymbol{L}_{x^h}=\bar{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h+\boldsymbol{\varepsilon}_{x^h} \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{L}_{x^h}$为虚拟观测值;$\bar{\boldsymbol{F}}$是块对角矩阵,即$\bar{\boldsymbol{F}}=\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F},\cdots,\boldsymbol{F})$,$\boldsymbol{F}$为单位阵;$\boldsymbol{\varepsilon}_{x^h}$为虚拟观测值的误差向量。

假设海面共布设了n个GNSS浮标,则浮标间可观测到的基线数为$n(n-1)/2$,且所有观测基线都是不重复的。选择$n-1$条独立基线,将其作为约束条件纳入观测方程中来优化定位模型,相应的线性化后的浮标间互测距观测方程为:

$$\boldsymbol{L}_h=\boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h+\boldsymbol{\varepsilon}_h \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{L}_h$为浮标间的互测距观测值与计算值的差值;$\boldsymbol{H}$为浮标互测距方程的设计矩阵;$\boldsymbol{\varepsilon}_h$为浮标互测距的观测误差;联合式(4)、式(5)和式(6),则可构建附加海面浮标基线约束的联合平差函数模型:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_{x^h}\\ \boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{L}_h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{F}} & 0\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{H} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h\\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}^q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{x^h}\\ \boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_h\end{bmatrix} \tag{7}$$

根据最小二乘原理可得:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h\\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}^q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_x+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{H} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_x\boldsymbol{L}_{x^h}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{L}_h\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{L}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{N}_1=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_x\bar{\boldsymbol{F}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{H} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_x+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{H} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

式中,$\boldsymbol{P}_x$是虚拟观测权重,可根据GNSS定位的先验方差-协方差信息定权;$\boldsymbol{P}_h$是海面浮标间基线观测权矩阵。

2.2 附加浮标基线约束的联合平差随机模型

海面GNSS浮标位置虚拟观测、海面基线观测值和声学测距观测值属于不同类型观测值,利用验前方差估计观测值的权矩阵不能完全反映各类观测值的实际精度,不精确的随机模型会降低参数估计解的精度[18-20]。本文采用Helmert方差分量验后估计方法,对GNSS浮标位置虚拟观测值、浮标基线观测值和声呐测距值进行定权,削弱了随机模型不准确对水下定位的影响。由式(4)、式(5)、式(6)可得海面GNSS浮标位置虚拟观测、海面GNSS浮标基线和声学测距的误差方程为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}_{x^h}=\bar{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h-\boldsymbol{L}_{x^h}\\ \boldsymbol{V}_h=\boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h-\boldsymbol{L}_h\\ \boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^h+\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^q-\boldsymbol{L}\end{cases} \tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{V}_{x^h}$为海面浮标位置的改正数向量;$\boldsymbol{V}_h$为海面基线的改正数向量;$\boldsymbol{V}$为声学测距的改正数向量。

根据Helmert方差分量估计,附加海面基线约束的联合平差随机模型验后估计式为:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{12} & \boldsymbol{S}_{13}\\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22} & \boldsymbol{S}_{23}\\ \boldsymbol{S}_{31} & \boldsymbol{S}_{32} & \boldsymbol{S}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_1^2\\ \hat{\sigma}_2^2\\ \hat{\sigma}_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{x^h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_x\boldsymbol{V}_{x^h}\\ \boldsymbol{V}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{V}_h\\ \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{hq}\boldsymbol{V}\end{bmatrix} \tag{10}$$

式中:

$$\boldsymbol{S}_{11}=n_1-2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_1)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_1)^2$$

$$\boldsymbol{S}_{12}=\boldsymbol{S}_{21}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_2)$$

$$\boldsymbol{S}_{13}=\boldsymbol{S}_{31}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_3)$$

$$\boldsymbol{S}_{22}=n_2-2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_2)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_2)^2$$

$$\boldsymbol{S}_{32}=\boldsymbol{S}_{23}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_3)$$

$$\boldsymbol{S}_{33}=n_3-2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_3)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_3)^2$$

其中,n_1为海面浮标位置虚拟观测数;n_2为海面基线观测数;n_3为声学测距观测数;$\hat{\sigma}_1^2$为海面浮标位置虚拟观测量的单位权方差;$\hat{\sigma}_2^2$为海面基线观测量的单位权方差;$\hat{\sigma}_3^2$为声学测距观测量的单位权方差。

本文设计的附加浮标基线约束的联合平差随机模型验后估计的计算过程如下:

1)将观测值分为海面浮标位置虚拟观测值、海面浮标间基线值和海面换能器到海底应答器的声学测距值3类独立观测值,分别对其进行验前权估计,求得3类观测值的初始权$\boldsymbol{P}_x$、$\boldsymbol{P}_h$与$\boldsymbol{P}_{hq}$。

2)对海面浮标位置虚拟观测量、浮标基线观测量和海面换能器到海底应答器的声学测距观测量进行第一次平差,得到3类观测值的改正数$\boldsymbol{V}_{x^h}$、$\boldsymbol{V}_h$及$\boldsymbol{V}$。

3)根据附加浮标基线约束的联合平差随机模型验后估计所采用的Helmert方差分量估计公式,求得3类观测值单位权方差的第一次估值$\hat{\sigma}_1^2$、$\hat{\sigma}_2^2$与$\hat{\sigma}_3^2$,再根据$\boldsymbol{P}_i^{k+1}=\boldsymbol{P}_i^k\cdot C/\hat{\sigma}_i^2(i=1,2,3;C$为系数矩阵)重新定权。

4)反复进行步骤2)和步骤3),直至$\hat{\sigma}_1^2$、$\hat{\sigma}_2^2$与$\hat{\sigma}_3^2$的比值符合设定的阈值,得到相对应的权,将权代入式(8)中进行参数的求解。

2.3 附加浮标基线约束的联合平差方法的优越性

根据方差-协方差传播定律[21],传统GNSS/A

定位方法计算的海底应答器的方差-协方差矩阵D_{LS}为:

$$D_{\mathrm{LS}}=\sigma_0^2(B^{\mathrm{T}}P_{hq}B)^{-1} \tag{11}$$

式中,σ_0^2为单位权方差;下标LS(least square)为最小二乘。

由文献[16]可知,根据方差-协方差传播定律,联合平差(joint adjustment, JA)计算海底应答器的方差-协方差矩阵D_{JA}为:

$$D_{\mathrm{JA}}=\sigma_0^2\left(B^{\mathrm{T}}P_{hq}B-B^{\mathrm{T}}P_{hq}A(P_x+A^{\mathrm{T}}P_{hq}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}P_{hq}B\right)^{-1} \tag{12}$$

根据式(7),附加浮标基线约束的GNSS/A联合平差的函数模型可表达为:

$$S=G\mathrm{d}x^h+K\mathrm{d}x^q+\varepsilon_l=\begin{bmatrix}G & K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x^h\\ \mathrm{d}x^q\end{bmatrix}+\varepsilon_l \tag{13}$$

式中,S为观测值向量,$S=\begin{bmatrix}L_{x^h}^{\mathrm{T}} & L^{\mathrm{T}} & L_h^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$;$G$、$K$均为设计矩阵,$G=\begin{bmatrix}\bar{F}^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}} & H^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,$K=\begin{bmatrix}0 & B^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$;$\varepsilon_l$为误差向量,$\varepsilon_l=\begin{bmatrix}\varepsilon_{x^h}^{\mathrm{T}} & \varepsilon^{\mathrm{T}} & \varepsilon_h^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

根据LS原理,由式(13)可得附加浮标基线约束的GNSS/A联合平差的法方程为:

$$\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x^h\\ \mathrm{d}x^q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_1\\ W_2\end{bmatrix} \tag{14}$$

式中,$U_{11}=G^{\mathrm{T}}PG$;$U_{12}=G^{\mathrm{T}}PK$;$U_{21}=K^{\mathrm{T}}PG$;$U_{22}=K^{\mathrm{T}}PK$;$W_1=G^{\mathrm{T}}PS$;$W_2=K^{\mathrm{T}}PS$,$P=\mathrm{blkdiag}(P_x,P_{hq},P_h)$,为$(5n-1)\times(5n-1)$的块对角矩阵。将式(14)进行等价变换可得:

$$C\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x^h\\ \mathrm{d}x^q\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}W_1\\ W_2\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}0 & U_1\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x^h\\ \mathrm{d}x^q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1\\ W_2\end{bmatrix} \tag{16}$$

式中,$C=\begin{bmatrix}-Z & E_3\\ 0 & E_3\end{bmatrix}$,$E_3$是$3\times3$的单位阵;$Z=U_{21}U_{11}^{-1}$;$U_1=K^{\mathrm{T}}P(E_{5n-1}-GU_{11}^{-1}G^{\mathrm{T}}P)K$,其中$E_{5n-1}$是$(5n-1)\times(5n-1)$的单位阵;$R_1=K^{\mathrm{T}}P(E_{5n-1}-GU_{11}^{-1}G^{\mathrm{T}}P)S$。

解算式(16)可得:

$$K^{\mathrm{T}}P\left(E_{5n-1}-GU_{11}^{-1}G^{\mathrm{T}}P\right)K\mathrm{d}x^q=K^{\mathrm{T}}P(E_{5n-1}-GU_{11}^{-1}G^{\mathrm{T}}P)S \tag{17}$$

令:

$$J=GU_{11}^{-1}G^{\mathrm{T}}P \tag{18}$$

则有:

$$(E_{5n-1}-J)^2=E_{5n-1}-J \tag{19}$$

$$(E_{5n-1}-J)^{\mathrm{T}}P=P(E_{5n-1}-J) \tag{20}$$

式中,矩阵$E_{5n-1}-J$是幂等矩阵;$(E_{5n-1}-J)^{\mathrm{T}}P$是对称矩阵。

根据式(18)~式(20),式(17)可改写为:

$$K^{\mathrm{T}}(E_{5n-1}-J)^{\mathrm{T}}P(E_{5n-1}-J)K\mathrm{d}x^q=K^{\mathrm{T}}(E_{5n-1}-J)^{\mathrm{T}}PS \tag{21}$$

令$Y=(E_{5n-1}-J)K$,根据式(21)可得海底应答器的坐标改正数为:

$$\mathrm{d}x^q=(Y^{\mathrm{T}}PY)^{-1}Y^{\mathrm{T}}PS \tag{22}$$

采用方差-协方差传播定理,则附加基线约束的GNSS/A水下联合平差方法计算得到的海底应答器的方差-协方差阵D_{IJA}计算式为:

$$D_{\mathrm{IJA}}=\sigma_0^2(Y^{\mathrm{T}}PY)^{-1}=\sigma_0^2\left(B^{\mathrm{T}}P_{hq}B-B^{\mathrm{T}}P_{hq}A(P_x+A^{\mathrm{T}}P_{hq}A+H^{\mathrm{T}}P_hH)^{-1}A^{\mathrm{T}}P_{hq}B\right)^{-1} \tag{23}$$

由于$P_x+A^{\mathrm{T}}P_{hq}A+H^{\mathrm{T}}P_hH$为正定矩阵,则满足:

$$\mathrm{tr}(P_x+A^{\mathrm{T}}P_{hq}A+H^{\mathrm{T}}P_hH)^{-1}<\mathrm{tr}(P_x+A^{\mathrm{T}}P_{hq}A)^{-1} \tag{24}$$

将式(24)代入式(23)并求迹可得:

$$\mathrm{tr}(D_{\mathrm{IJA}})=\sigma_0^2\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}P_{hq}B-B^{\mathrm{T}}P_{hq}A(P_x+A^{\mathrm{T}}P_{hq}A+H^{\mathrm{T}}P_hH)^{-1}A^{\mathrm{T}}P_{hq}B)^{-1}<\sigma_0^2\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}P_{hq}B-B^{\mathrm{T}}P_{hq}A(P_x+A^{\mathrm{T}}P_{hq}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}P_{hq}B)^{-1}=\mathrm{tr}(D_{\mathrm{JA}}) \tag{25}$$

经证明联合平差方法优于传统GNSS/A定位方法[16],联合式(25),则3种方法求得的海底应答器的方差-协方差阵求迹后的大小关系为:

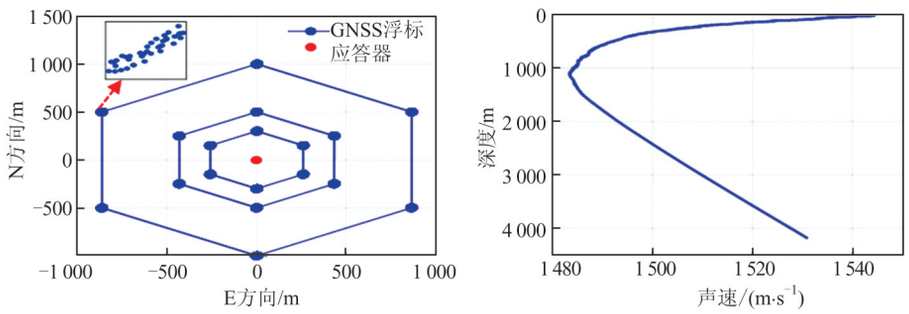
$$\mathrm{tr}(D_{\mathrm{IJA}})<\mathrm{tr}(D_{\mathrm{JA}})<\mathrm{tr}(D_{\mathrm{LS}}) \tag{26}$$

由以上证明可知,附加浮标基线约束的GNSS/A水下联合平差方法的方差-协方差的迹最小,表明本文方法能够提高传统GNSS/A定位方法和联合平差的定位精度,获取更加可靠稳定的水下定位参数估计解。

3　实验及分析

采用仿真数据来验证本文方法的有效性。如图2(a)所示,GNSS/A水下定位系统主要由海面GNSS浮标和海底应答器组成。在海面布设6个GNSS浮标,形状为正六边形,共可以形成15条基线,选择5条独立基线进行约束。海底应答器仿真深度分别为300 m、500 m和1 000 m。图2(b)给出了声速剖面,采用声线跟踪方法模拟海面换能器和海底应答器之间的传播时间。考虑到时间和声速的随机误差,忽略了声波的短期影响和潮汐的长期影响,声学测距误差设置为换能器和海底应答器之间距离的1/10 000倍,并且在实验中加入了系统误差。为了更加符合实际海洋环境,表

面波模拟为2 m的余弦波,且海面浮标位置随着时间的推移在不断的变化,水平方向速度为5 cm/s左右(浮标的动态图如图2(a)左上角所示)。GNSS精密单点定位精度约为20 cm,GNSS浮标之间的基线观测误差约为5 cm。模拟100个历元的基线观测数据和声学测距数据,分别采用传统GNSS/A方法、顾及海面位置误差的联合平差方法(简称联合平差)和本文附加浮标基线约束的GNSS/A水下联合平差方法(简称附加基线约束的联合平差)3种方法计算海底应答器的位置。



(a) 位置布局 (b) 声速剖面

图2 浮标与应答器位置布局及声速剖面图

Fig. 2 Position Layout Diagram and Sound Velocity Profile of Buoy and Transponder

图3给出了3种方法在不同水深情况下,海底应答器的E、N、U 3个方向偏差的均方根(root mean square,RMS)定位误差。由图3可知,3种方法在E、N、U 3个方向的定位误差随着水深的增加而增大。由于声学换能器位置误差的影响,传统GNSS/A水下定位方法的平差定位精度最低。联合平差方法通过降低声学换能器位置误差的影响,一定程度上提高了海底应答器的定位精度,但该方法没有考虑海面浮标间的基线观测信息。附加基线约束的联合平差方法将海面基线观测信息作为约束信息纳入到联合平差中,提高了海底应答器的定位精度。由图3可知,附加基线约束的联合平差方法能够获取更可靠的定位结果。

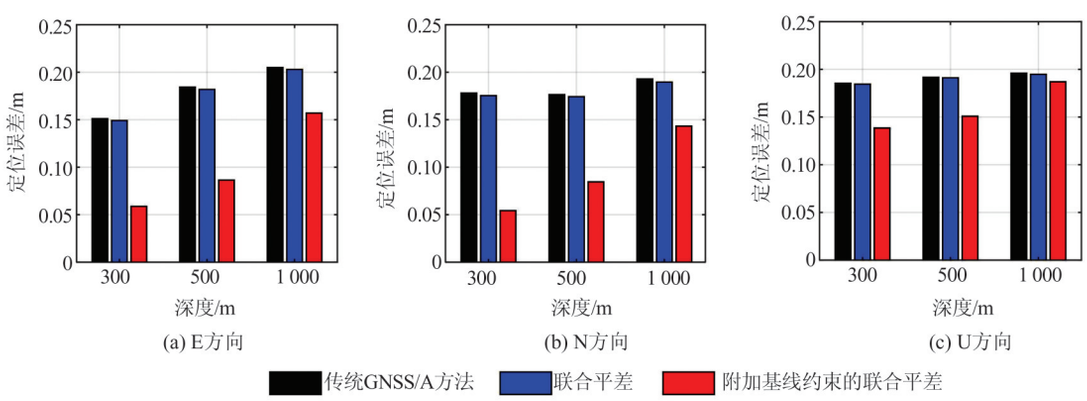


图3 3种定位方法在不同水深情况下定位误差

Fig. 3 Statistics of Positioning Errors in Three Directions for Three Methods

表1给出了3种方法在不同深度的二维(2D)和三维(3D)定位误差的RMS值,以此来评估海底应答器的定位精度。从表1中可以看出,通过附加基线约束的联合平差方法计算的海底应答器定位精度最高。在水深300 m、500 m、1 000 m时,与联合平差方法相比,海底大地控制点的2D平面精度分别提高了0.150 2 m、0.131 0 m、0.065 1 m;相比于传统GNSS/A方法,海底应答器的精度分别提高了0.153 5 m、0.134 2 m、0.068 9 m。在3种不同水深情况下,附加基线约束的联合平差方法的3D精度分别为0.160 0 m、0.193 4 m、0.283 1 m,与联

表1 3种定位方法在不同水深精度统计/m

Table 1 Accuracy Statistics of Three Positioning Methods Under Different Water Depths/m

方法	水深300 m		水深500 m		水深1 000 m	
	2D	3D	2D	3D	2D	3D
传统GNSS/A	0.233 5	0.298 2	0.255 1	0.319 1	0.281 5	0.343 0
联合平差	0.230 2	0.295 0	0.251 9	0.316 2	0.277 7	0.339 2
本文方法	0.080 0	0.160 0	0.120 9	0.193 4	0.212 6	0.283 1

合平差方法相比,海底应答器的精度分别提高了45.8%、38.8%、16.5%,相比于传统GNSS/A方法,精度分别提高了46.3%、39.4%、17.5%。综上,本文提出的附加浮标间基线约束的联合平差方法的定位精度优于其他两种方法。

以第一个浮标为例,3种方法在不同水深情况下,海面GNSS浮标到海底应答器的声学测距残差直方图见图4(其余类似)。由图4可知,3种定位方法在不同深度下的声学测距残差概率密度都服从正态分布。由于声学换能器位置误差的影响,传统GNSS/A方法的密集度最低。通过降低换能器位置误差的影响,联合平差方法一定程度上提高了残差的拟合度。而附加基线约束的联合平差方法的密集度最高,明显优于联合平差和传统GNSS/A方法,这表明无论是在解算精度还是模型拟合度上,本文方法具有更好的解算效果和可信度。

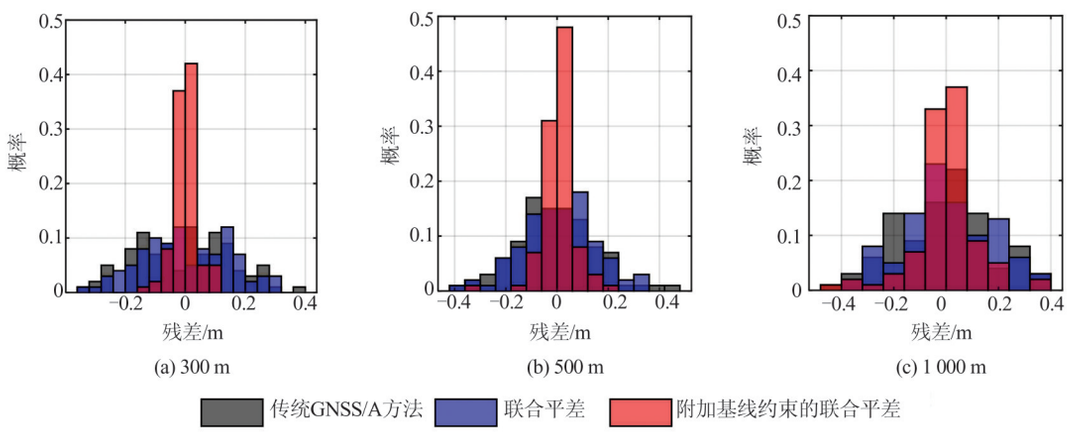


图4　3种定位方法的残差直方图

Fig. 4　Residual Histograms of Three Positioning Methods

4　结　语

为了提高海底应答器的定位精度,本文将海面GNSS浮标与海底应答器的位置都作为未知数,海面换能器的位置当成虚拟观测纳入观测方程中,并顾及海面高精度的浮标基线信息,提出了附加浮标基线约束的水下联合平差方法。顾及海面浮标位置虚拟观测值、浮标基线观测值与海面换能器到海底应答器的声学测距观测值属于不同类观测值,以方差分量估计方法为基础,合理地估计3类观测值的权矩阵。通过仿真实验进行验证,结果表明,本文方法能够获得较稳定的残差值。在水深300 m、500 m、1 000 m的情况下,本文方法海底应答器的定位精度比传统GNSS/A定位方法分别提高了46.3%、39.4%、17.5%,比联合平差方法分别提高了45.8%、38.8%、16.5%。

参　考　文　献

[1] 刘经南, 陈冠旭, 赵建虎, 等. 海洋时空基准网的进展与趋势[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(1): 17-37.
LIU Jingnan, CHEN Guanxu, ZHAO Jianhu, et al. Development and Trends of Marine Space-Time Frame Network [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(1): 17-37.

[2] 齐珂, 曲国庆, 苏晓庆, 等. 水下声呐定位浮标阵列解析优化[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(9): 1312-1319.
QI Ke, QU Guoqing, SU Xiaoqing, et al. Analytical Optimization on GNSS/Sonar Buoy Array Deployment for Underwater Positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(9): 1312-1319.

[3] 程世来, 张小红. 基于PPP技术的GPS浮标海啸预警模拟研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(9): 764-766.
CHENG Shilai, ZHANG Xiaohong. Simulation of Tsunami Forecasting with GPS Buoy Using PPP Technology[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32(9): 764-766.

[4] 马越原, 曾安敏, 许扬胤. 圆走航模式下海底控制点对称差分定位模型及分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(7): 1155-1165.
MA Yueyuan, ZENG Anmin, XU Yangyin. Symmetric Difference Positioning Model and Analysis of Sailing Circle Mode of Seafloor Control Points[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(7): 1155-1165.

[5] 杨元喜, 刘焱雄, 孙大军, 等. 海底大地基准网建设及其关键技术[J]. 中国科学: 地球科学, 2020,

50(7): 936-945.
YANG Yuanxi, LIU Yanxiong, SUN Dajun, et al. Seafloor Geodetic Network Establishment and Key Technologies[J]. *Scientia Sinica (Terrae)*, 2020, 50(7): 936-945.

[6] CHEN G X, LIU Y, LIU Y X, et al. Improving GNSS-Acoustic Positioning by Optimizing the Ship's Track Lines and Observation Combinations [J]. *Journal of Geodesy*, 2020, 94(6): 61.

[7] SATO M, FUJITA M, MATSUMOTO Y, et al. Improvement of GPS/Acoustic Seafloor Positioning Precision Through Controlling the Ship's Track Line [J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(9): 825-842.

[8] 赵爽, 王振杰, 吴绍玉, 等. 基于选权迭代的走航式水声差分定位方法[J]. 石油地球物理勘探, 2017, 52(6): 1137-1145.
ZHAO Shuang, WANG Zhenjie, WU Shaoyu, et al. A Ship-Board Acoustic Difference Positioning Method Based on Selection Weight Iteration[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2017, 52(6): 1137-1145.

[9] 蔡艳辉, 杨新红. 差分GPS水下定位系统的解析法分析[J]. 大地测量与地球动力学,2008, 28(6): 101-106.
CAI Yanhui, YANG Xinhong. Underwater Positioning System's Baseline Network Analyzing Based on Analytical Method[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2008, 28(6): 101-106.

[10] XU P L, ANDO M, TADOKORO K. Precise, Three-Dimensional Seafloor Geodetic Deformation Measurements Using Difference Techniques [J]. *Earth, Planets and Space*, 2005, 57(9): 795-808.

[11] XIN M Z, YANG F L, LIU H, et al. Single-Difference Dynamic Positioning Method for GNSS-Acoustic Intelligent Buoys Systems[J]. *Journal of Navigation*, 2020, 73(3): 646-657.

[12] 刘慧敏, 王振杰, 赵爽. 深度约束的浅海多目标声学定位方法[J]. 石油地球物理勘探, 2019, 54(6): 1181-1187.
LIU Huimin, WANG Zhenjie, ZHAO Shuang. A Depth-Constraint Multi-target Positioning Acoustic Approach in Shallow Waters[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2019, 54(6): 1181-1187.

[13] 赵建虎, 邹亚靖, 吴永亭, 等. 深度约束的海底控制网点坐标确定方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2016, 48(10): 137-141.
ZHAO Jianhu, ZOU Yajing, WU Yongting, et al. Determination of Underwater Control Point Coordinate Based on Constraint of Water Depth[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2016, 48(10): 137-141.

[14] 孙文舟, 曾安敏, 赵翔. 顾及参考深度误差的海底控制点迭代算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(2): 324-330.
SUN Wenzhou, ZENG Anmin, ZHAO Xiang. Iterative Algorithm of Seafloor Control Points Positioning Taking Reference Depth Error into Account [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(2): 324-330.

[15] 王振杰, 刘慧敏, 杨慧良, 等. 基于垂直约束的深海拖曳系统USBL/DVL组合导航算法[J]. 中国惯性技术学报, 2019, 27(5): 670-676.
WANG Zhenjie, LIU Huimin, YANG Huiliang, et al. USBL/DVL Integrated Navigation Algorithm for Deep-Sea Towing System Based on Vertical Constraints[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2019, 27(5): 670-676.

[16] ZHAO S, WANG Z J, NIE Z X, et al. Investigation on Total Adjustment of the Transducer and Seafloor Transponder for GNSS/Acoustic Precise Underwater Point Positioning[J]. *Ocean Engineering*, 2021, 221: 108533.

[17] TRAN D T, NGUYEN D H, LUONG N D, et al. Impact of the Precise Ephemeris on Accuracy of GNSS Baseline in Relative Positioning Technique [J]. *Vietnam Journal of Earth Sciences*, 2020, 43(1): 96-110.

[18] 赵爽, 王振杰, 刘慧敏. 顾及声线入射角的水下定位随机模型[J]. 测绘学报, 2018, 47(9): 1280-1289.
ZHAO Shuang, WANG Zhenjie, LIU Huimin. Investigation on Underwater Positioning Stochastic Model Based on Sound Ray Incidence Angle[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2018, 47(9): 1280-1289.

[19] 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.
CUI Xizhang, YU Zongchou, TAO Benzao, et al. Generalized Survey Adjustment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2009.

[20] 武矿超, 申文斌, 李立弘. GNSS频移法测定重力位研究进展与展望[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(11): 2037-2050.
WU Kuangchao, SHEN Wenbin, LI Lihong. Advances and Prospects in Gravity Potential Determination Based on the GNSS Frequency Shift Approach [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(11): 2037-2050.

[21] 黄维彬. 近代平差理论及其应用[M]. 北京: 解放军出版社, 1992.
HUANG Weibin. Modern Adjustment Theory and Its Application[M]. Beijing: The People's Liberation Army Press, 1992.