第 49 卷 第 6 期：2505-2516 高电压技术 Vol.49, No.6: 2505-2516
2023 年 6 月 30 日 High Voltage Engineering June 30, 2023
DOI: 10.13336/j.1003-6520.hve.20230039

虚拟同步发电机暂态全局稳定分析与阻尼调制方法

杨银国[1]，戴耀辉[2]，陆秋瑜[1]，韩金龙[2]，谢平平[1]，李宇骏[2]
（1. 广东电网有限责任公司电力调度控制中心，广州 510600；2. 西安交通大学电气工程学院，西安 710049）

摘　要：不同于传统的同步发电机，虚拟同步发电机(virtual synchronous generator，VSG)的阻尼可以灵活调整，以增强系统的动态性能。首先建立了 VSG 系统的动态模型，基于李雅普诺夫理论导出了系统的保守稳定域。其次，基于能量守恒定律，发现阻尼耗散的能量等于阻尼因子乘以相平面中系统轨线和 x 轴包围的面积。研究结果表明：当每个周期内阻尼耗能大于势能变化量时，每个周期系统不稳定平衡点处的动能会单调递减，VSG 系统可以实现全局稳定。由此，进一步提出了确保系统全局稳定性的阻尼调制方法。最后，基于 PSCAD/EMTDC 仿真分析验证了所提全局稳定条件的正确性和阻尼调制方法的有效性。

关键词：虚拟同步发电机；李雅普诺夫定理；能量函数；阻尼耗散能量；全局稳定性；阻尼调制方法

Transient Global Stability Analysis and Damping Tuning Method of Virtual Synchronous Generator

YANG Yinguo[1], DAI Yaohui[2], LU Qiuyu[1], HAN Jinlong[2], XIE Pingping[1], LI Yujun[2]
(1. Electric Power Dispatching and Control Center of Guangdong Power Grid Corporation, Guangzhou 510600, China;
2. School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Unlike traditional synchronous generators, the damping of virtual synchronous generators(VSG) can be flexibly adjusted to enhance the dynamic performance of the system. In order to reveal the stabilization mechanism of VSG system, the global stability mechanism of VSG system considering the damping effect is analyzed. First, the dynamic model of VSG system is established, and the stable domain of the system is derived based on the Lyapunov theory. Accordingly, based on the law of conservation of energy, it is interesting to find that the energy dissipated by the damping is equal to the damping factor multiplied by the area surrounded by the system trajectory and x-axis in the phase plane. The research results show that when the dissipated energy induced by damping over one period is larger than potential energy change, the system kinetic energy will be gradually decreased until to zero, and the global stabilization can be ensured. Then, a damping tuning method to ensure the global stability of the system is further proposed. Finally, simulation studies based on PSCAD/EMTDC have validated the correctness of the proposed global stability condition and the effectiveness of the damping tuning method of VSG.

Key words: virtual synchronous generator; Lyapunov theory; energy function; dissipated energy induced by damping; global stability; damping tuning rule

0　引言

电压源换流器(voltage source converter，VSC)由于其灵活的控制和较高的电能质量，已被广泛用作可再生发电单元和电网之间的接口[1-2]。传统的并网 VSC 会配备锁相环(phase-locked loop，PLL)与电网进行同步[3]。这种方案称为跟网型控制，这种控制方式要求电网足够强，使得 PLL 能够可靠地跟踪电网的相位[4-5]。相对于跟网型控制，构网型控制不依赖于交流系统强度，可适用于孤岛送电、无源网络供电等多种场景[6-9]。其中，虚拟同步发电机(virtual synchronous generator，VSG)因其突出的惯性支撑能力获得了国内外学者的广泛关注，被认为是未来可再生能源并网的优选方案[10-11]。然而，类似于同步机，VSG 可能会在严重电网故障下失去同步，这引起了许多研究人员的关注[12-16]。与具有固定物理阻尼的同步机不同，VSG 的虚拟阻尼可以被灵活调整以提高动态性能[17-18]。然而，很少有文献研究虚拟阻尼对 VSG 同步稳定性的影响。

基金资助项目：中国南方电网公司科技项目(036000KK52210042 (GDKJXM20212057))。
Project supported by Science and Technology Project of China Southern Power Grid Corporation (036000KK52210042 (GDKJXM 20212057)).

通常，动态系统可以通过高阶非线性微分代数方程(differential-algebraic equations，DAE)进行建模，系统稳定性通过 DAE 的时域解确定[19]。尽管这种基于数值仿真的方法准确可靠，但其仅提供了某些选定场景的有限信息，无法获得暂态稳定性的一般规律。为了研究影响系统稳定性的主要因素，文献[8]、[13]、[20]、[21]中提出了适用于暂态稳定性分析的构网型换流器降阶模型。相平面法是动力系统稳定性分析的常用方法[22]，该方法将系统运动过程投影到相平面以形成系统轨线。通过观察轨线是否收敛到稳定平衡点(stable equilibrium point，SEP)，相平面能够清晰地反映系统稳定性。文献[8]建立了采用功率同步控制(power synchronous control，PSC)的 VSC 系统一阶模型，基于相平面法，揭示了即使故障清除角度超过临界角度，PSC-VSC 也能与电网重新同步。文献[12]给出了虚拟电阻 VSG 的相平面图，表明虚拟电阻可能会对 VSG 的暂态稳定性产生负面影响。随后，文献[12]中提出了一种降低故障时 VSG 有功功率设定值以增强暂态稳定性的控制方法。文献[13]中建立了采用构网型控制方法的 VSC 通用模型。基于相平面法可知，由于缺乏阻尼，即使扰动后存在 SEP，VSG 也可能失稳。文献[23]从传统同步机的暂态稳定分析方法入手，定性地分析了组网型 VSC 的暂态过程，通过基于相图的非线性微分方程的分析方法，定量研究了组网型 VSC 的暂态失稳机理。然而，由于绘制系统轨线依赖于数值计算，因此相平面法耗时且效率低下。此外，该方法未能建立解析稳定性准则，导致其背后的同步稳定机制不明确。

等面积准则(equal-area criterion，EAC)无需数值计算，是暂态稳定分析的常用方法。通过比较加速面积和减速面积，可以直接判别系统的同步稳定性。通常，出于分析简单和保守性考虑，在传统同步机暂态稳定性分析中，一般忽略了同步机的阻尼[24]。类似地，文献[14-15]忽略了阻尼作用，应用 EAC 评估了 VSG 系统的暂态稳定性。通过在检测到正反馈模式时改变功率角控制环路增益的正负号，文献[14]提出一种模式自适应控制策略来增强VSG暂态稳定性，并基于 EAC 证明了所提控制策略的有效性。文献[15]考虑了故障限流，应用 EAC 推导了 VSG 系统故障临界清除时间和临界清除角的解析表达式，并根据推导的表达式进一步确定用于增强暂态稳定性的最佳电流参考角。文献[16]考虑阻尼作用，提出了一种在扰动后改变 VSG 惯性和阻尼系数的暂态稳定控制策略。然而，该方法需要通过数值拟合来计算加速和减速区域，难以直观刻画阻尼如何影响 VSG 的暂态稳定性。此外，该方法难以计及阻尼的影响，无法揭示 VSG 全局暂态稳定机理。

李雅普诺夫(Lyapunov)法是暂态稳定性分析的另一种直接方法，其将稳定性判别转化为检验能量函数的收敛性。文献[20]构建了 VSG 的能量函数，发现当故障后累积能量小于不稳定平衡点(unstable equilibrium point，UEP)处的能量时，VSG 将保持同步。文献[25]提出了一种近似的李雅普诺夫方法，该方法结合了无功控制环，通过数值计算更新 VSG 输出电压，并逐步修正能量函数。文献[21]研究了同步机和 VSG 并联系统的同步稳定性，利用 Takagi-Sugeno(TS)模糊模型构建了高阶非线性系统的能量函数。然而，基于 TS 模糊模型的李雅普诺夫方法涉及矩阵的数值计算，无法得到系统稳定性与关键参数之间的简洁数学关系。文献[26]提出了具有不同控制方案的构网型换流器的统一模型。基于 TS 模糊模型的李雅普诺夫方法对 VSG 的吸引域(domain of attraction，DOA)进行了评估，发现提高 VSG 的阻尼系数有利于全局稳定。此外，文献[26]指出，目前缺乏适当的方法来分析考虑阻尼效应的 VSG 同步稳定机制。文献[27]提出了一种考虑阻尼和电流限幅的 VSG 模型，采用李雅普诺夫直接法对接有 VSG 的单机无穷大系统进行暂态稳定性分析，但也未能建立解析的稳定判据，无法揭示 VSG 系统的同步稳定机制。

现有工作通常关注于系统暂态过程后的首摆稳定性，并且尚未深入探讨阻尼对 VSG 暂态稳定性的影响。由于缺乏稳定性和阻尼之间的数学关系，考虑阻尼作用的 VSG 同步稳定机制尚不清楚。本文聚焦于阻尼作用下的 VSG 暂态稳定性分析。首先建立了 VSG 系统的动态模型，基于李雅普诺夫定理，推导出系统的稳定域；然后根据系统方程推导出系统能量守恒定理，并引出全局稳定条件；在此基础上，进一步提出解析且保守的 VSG 系统阻尼调制方法。

1 VSG 的稳定域

图 1 是单 VSC 通过传输线连接到无穷大母线的系统结构图。其中，X_c 和 X_l 分别为相电抗器和传输

线的电抗；$U_p\angle\theta$ 为公共耦合点(point of common coupling，PCC)电压；U_s 为无穷大母线电压；I_c 是流过相电抗器的电流；P_c 为换流器输出的有功功率。

1.1 VSG 建模与坐标变换

图 2 是 VSG 控制结构图。VSG 的外部功率环可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega_c-\omega_s\\ T_J\dfrac{\mathrm{d}\omega_c}{\mathrm{d}t}=P_0-P_c-k_d(\omega_c-\omega_s)\end{cases}\tag{1}$$

式中：θ为 d 轴和 x 轴之间的夹角；ω_c 和 ω_s 分别为换流器频率和无限大母线频率；T_J 为虚拟同步控制惯性时间常数；P_0 为有功功率设定值；k_d 为虚拟阻尼系数。

通常，内环的动态响应要比外环快得多。因此，在分析功率外环引起的暂态稳定性问题时，内环可以忽略，同时可以认为 PCC 点电压被控制为常值，记为 U_p。换流器输出的有功功率 P_c 可表示为

$$P_c=\frac{U_pU_s}{X_1}\sin\theta\tag{2}$$

由式(1)和式(2)可得 VSG 动态系统的 SEP 为

$$\begin{cases}\theta_{(0),k}=\theta_0+2k\pi\\ \omega_{c(0)}=\omega_s\end{cases},k\in\mathbb{Z},\theta_0=\arcsin\left(\frac{P_0X_1}{U_pU_s}\right)\tag{3}$$

式中：k 为研究系统的稳定平衡点的周期；θ_0 为初始稳态时 d 轴和 x 轴之间的夹角；$\theta_{(0),k}$ 为第 k 周期稳定平衡点的相角；$\omega_{c(0)}$为稳态下系统的角速度。

为方便起见，在不失一般性的前提下，采用式(4)所示的坐标变换。

$$\begin{cases}x=\theta-\theta_{(0),k}\\ y=\omega_c-\omega_s\end{cases}\tag{4}$$

则系统动态方程改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x)-Dy\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$g(x)=\frac{U_pU_s}{T_JX_l}\sin(x+\theta_{(0),k})-\frac{P_0}{T_J},\quad D=\frac{k_d}{T_J}\tag{6}$$

式(5)表明，通过式(4)所示的坐标变换，可以将周期 k 内系统 SEP 的稳定性问题转化为原点的稳定性问题。

1.2 能量函数和稳定域

为求得式(5)所示系统在原点的稳定域，构造一

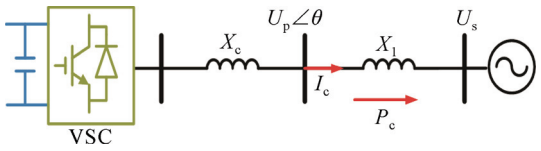


图 1 单 VSC 通过传输线连接到无穷大母线的系统结构图

Fig.1 Outline of one VSC connected to infinite bus via a transmission line

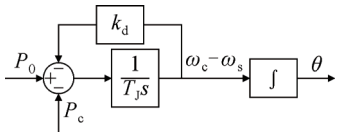


图 2 VSG 的控制结构图

Fig.2 Schematic diagram of VSG

个能量函数，如式(7)所示(详细构造过程见附录 A)。

$$\begin{cases}E(x,y)=\dfrac{y^2}{2}+G(x)\\ G(x)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u\end{cases}\tag{7}$$

式中，函数 $E(x, y)$第 1 部分表示系统的动能，这一项始终大于等于 0；第 2 部分与系统势能相关。李雅普诺夫定理[22]要求函数 $E(x, y)$为正定的，$E(x, y)$对时间的导数非正。显然，当状态变量 x 位于式(8)所示的范围内时，能量函数 $E(x, y)$为正定的。

$$xg(x)>0\Rightarrow x\in(x_a,x_b),\begin{cases}x_a=-\pi-2\theta_0\\ x_b=\pi-2\theta_0\end{cases}\tag{8}$$

式中 x_a 和 x_b 为式(5)所示系统的 2 个稳定平衡点。

函数 $E(x, y)$对时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y(-g(x)-Dy)+g(x)y=-Dy^2\le0\tag{9}$$

基于 Lyapunov 定理，当 x 位于式(8)所示的范围内时，式(5)所示系统能够保持稳定。

通过坐标反变换，可得原系统任意周期 k 的稳定域为

$$\theta_{\mathrm{uep},k}=(2k-1)\pi-\theta_0<\theta<\theta_{\mathrm{uep},k+1}=(2k+1)\pi-\theta_0,k\in\mathbb{Z}\tag{10}$$

式中$\theta_{\mathrm{uep},k}$表示第 k 周期不稳定平衡点的相角。

式(10)表明，若任何系统轨线在式(10)所示的范围内，则系统能够稳定第 k 周期的 SEP 上。如图 3 所示，只有当角度θ不超过第 k+1 周期 UEP 的相角($\theta_{\mathrm{uep},k+1}$)，系统轨线才能收敛到第 k 周期的 SEP。

2 全局稳定条件

基于第 1 章的 VSG 动态模型及推导的能量函数和稳定域，本章将引出 VSG 系统的能量守恒定

理和全局稳定条件。

2.1 能量守恒定理

将式(5)中的 2 个方程相除得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-g(x)-Dy}{y}\Rightarrow y\mathrm{d}y=(-g(x)-Dy)\mathrm{d}x \tag{11}$$

对于任何系统轨线$(\overset{\frown}{PQ})$，从点 $P(x_\mathrm{p},y_\mathrm{p})$到点 $Q(x_\mathrm{q},y_\mathrm{q})$对式(11)进行积分得

$$\int_{y_\mathrm{p}}^{y_\mathrm{q}}y\mathrm{d}y=\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}-g(x)\mathrm{d}x-D\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}y\mathrm{d}x \tag{12}$$

整理可得

$$\frac{y_\mathrm{q}^2}{2}-\frac{y_\mathrm{p}^2}{2}=\int_0^{x_\mathrm{p}}g(x)\mathrm{d}x-\int_0^{x_\mathrm{q}}g(x)\mathrm{d}x-D\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}y\mathrm{d}x=G(x_\mathrm{p})-G(x_\mathrm{q})-D\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}y\mathrm{d}x \tag{13}$$

移项得

$$E_\mathrm{q}=\frac{y_\mathrm{q}^2}{2}+G(x_\mathrm{q})=\frac{y_\mathrm{p}^2}{2}+G(x_\mathrm{p})-D\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}y\mathrm{d}x=E_\mathrm{p}-D\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}y\mathrm{d}x \tag{14}$$

式中 E_p 和 E_q 分别为点 P 和点 Q 的能量。

式(14)即是所研究系统的能量守恒定理。可知，阻尼 D 是造成系统能量变化的原因。特别地，如果系统阻尼为 0(忽略阻尼)，则研究系统能量守恒，即 $E_\mathrm{p}=E_\mathrm{q}$。由式(14)得

$$E_\mathrm{q}-E_\mathrm{p}=-D\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}y\mathrm{d}x \tag{15}$$

式(15)说明，对于任何系统轨线，系统能量变化等于阻尼引起的耗散能量。

基于式(15)，任何系统轨线$\overset{\frown}{PQ}$上阻尼引起的耗散能量(记为 E_pq^d)可以定义为

$$E_\mathrm{pq}^\mathrm{d}=D\int_{x_\mathrm{p}}^{x_\mathrm{q}}y\mathrm{d}x=E_\mathrm{p}-E_\mathrm{q} \tag{16}$$

如何计算阻尼引起的耗散能量成为了关键问题。任何二阶非线性系统的系统轨线都可以在图 4 所示的相平面中描绘出来，结合式(16)可知，阻尼引起的耗散能量等于相平面中系统轨线的积分面积乘以阻尼系数 D。

2.2 全局稳定条件

假设一条系统轨线穿过第 k 周期的 UEP 进入第 k 周期 SEP 的吸引域，即$(\theta_{\mathrm{uep},k},\theta_{\mathrm{uep},k+1})$，在$\theta_{\mathrm{uep},k}$和$\theta_{\mathrm{uep},k+1}$处的速度分别为$\omega_{\mathrm{c},k}$和$\omega_{\mathrm{c},k+1}$。基于式(4)，第 k 周期从点$(\theta_{\mathrm{uep},k},\ \omega_{\mathrm{c},k})$到点$(\theta_{\mathrm{uep},k+1},\ \omega_{\mathrm{c},k+1})$的系统轨线可以变换为从点$(x_\mathrm{a},y_k)$到点$(x_\mathrm{b},y_{k+1})$的轨线，记为 $C_{k,k+1}$。其中

$$y_k=\omega_{\mathrm{c},k}-\omega_\mathrm{s},y_{k+1}=\omega_{\mathrm{c},k+1}-\omega_\mathrm{s} \tag{17}$$

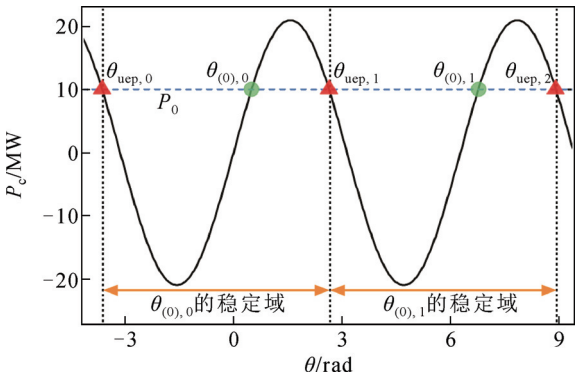


图 3 稳定域的周期性扩展

Fig.3 Periodical extension of stable region

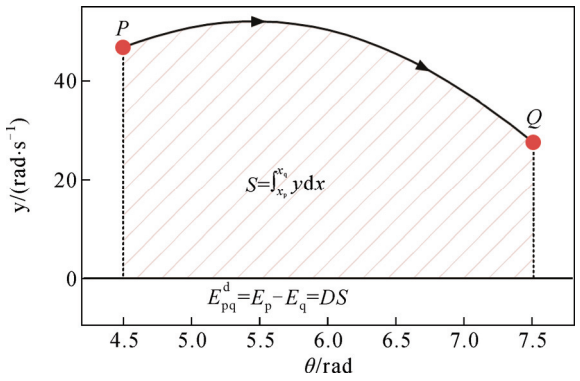


图 4 阻尼引起的耗散能量的计算

Fig.4 Calculation of dissipated energy induced by damping

结合式(13)得

$$\frac{y_{k+1}^2}{2}-\frac{y_k^2}{2}=G(x_\mathrm{a})-G(x_\mathrm{b})-D\int_{x_\mathrm{b}}^{x_\mathrm{a}}y\mathrm{d}x=E_\mathrm{ab}^\mathrm{p}-D\int_{x_\mathrm{b}}^{x_\mathrm{a}}y\mathrm{d}x \tag{18}$$

式中 E_ab^p 为一个常量，表示 2 个相邻 UEP 之间的势能变化。基于式(16)可以定义轨线 $C_{k,k+1}$ 上的阻尼引起的耗散能量 $E_{\mathrm{ab}(k,k+1)}^\mathrm{d}$，等于曲线 $C_{k,k+1}$ 与 x 轴包围的面积乘以 D，如式(19)和图 5 所示。

$$E_{\mathrm{ab}(k,k+1)}^\mathrm{d}=D\int_{x_\mathrm{a}}^{x_\mathrm{b}}y\mathrm{d}x,y(x_\mathrm{a})=y_k,y(x_\mathrm{b})=y_{k+1} \tag{19}$$

假设存在一条临界曲线 C_min 满足 $y(x_\mathrm{b})=0$，如图 5 所示。在曲线 C_min 上阻尼引起的耗散能量定义为一个周期内的最小耗散能量，记为 $E_{\mathrm{ab\,min}}^\mathrm{d}$，其表达式为

$$E_{\mathrm{ab\,min}}^\mathrm{d}=D\int_{x_\mathrm{a}}^{x_\mathrm{b}}y\mathrm{d}x,y(x_\mathrm{b})=0 \tag{20}$$

定理 1：如果不等式(21)成立，那么式(5)所表示系统是全局稳定的。

$$E_\mathrm{ab}^\mathrm{p}<E_{\mathrm{ab\,min}}^\mathrm{d} \tag{21}$$

特别地，如果 $y_n^2/2<E_{\mathrm{ab}(n,n+1)}^\mathrm{d}-E_\mathrm{ab}^\mathrm{p}$，那么系统将稳定在第 n 个周期的 SEP 上(证明过程见附录 B)。

定理 1 及其推导过程表明，当一个周期内阻尼耗散能量大于一个临界值时，系统动能将逐渐减小，直至为 0，从而使系统全局稳定。该临界值是一个周期内由阻尼引起的最小耗散能量，由式(20)确定。

3 确保全局稳定的 VSG 阻尼调制方法

为了确保 VSG 并网系统全局稳定，结合第 2 章推导的全局稳定条件，可以通过调整阻尼来满足全局稳定条件。本章将介绍确保全局稳定的 VSG 阻尼调制方法。

3.1 阻尼调制基本思想

由定理 1 可知，如果 2 个相邻 UEP 之间的系统势能变化低于一个周期内阻尼引起的最小耗散能量，则可以确保系统全局稳定。即

$$E_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{p}}=\int_{x_{\mathrm{a}}}^{x_{\mathrm{b}}}g(x)\mathrm{d}x<E_{\mathrm{ab\,min}}^{\mathrm{d}}=D\int_{x_{\mathrm{a}}}^{x_{\mathrm{b}}}y\mathrm{d}x \tag{22}$$

阻尼调制方法的核心思路就是选择合适的 VSG 控制参数，使得式(22)成立。然而，由于临界曲线 $C_{\min}$ 与控制参数相关并且难以获得，因此缺乏 $E_{\mathrm{ab\,min}}^{\mathrm{d}}$ 的表达式。为了解决这个问题，可以估计 $E_{\mathrm{ab\,min}}^{\mathrm{d}}$ 的下限，确保全局稳定条件的保守性。构造一条位于 $C_{\min}$ 下方的曲线 $\tilde{C}$，则

$$E_{\mathrm{ab\,min}}^{\mathrm{d}}>E_{\mathrm{rs}}^{\mathrm{d}}=D\int_{x_{\mathrm{r}}}^{x_{\mathrm{s}}}y\mathrm{d}x \tag{23}$$

式中：点 $(x_{\mathrm{r}},0)$ 和点 $(x_{\mathrm{s}},0)$ 为构造曲线 $\tilde{C}$ 的两端，且 $x_{\mathrm{r}}\geq x_{\mathrm{a}},x_{\mathrm{s}}\leq x_{\mathrm{b}}$；$E_{\mathrm{rs}}^{\mathrm{d}}$ 为曲线 $\tilde{C}$ 的阻尼耗散能量。

推论：如果式(24)满足的话，那么式(5)所表示的系统就是全局稳定的。

$$E_{\mathrm{rs}}^{\mathrm{d}}>E_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{p}} \tag{24}$$

证明：由式(23)和式(24)得

$$E_{\mathrm{ab\,min}}^{\mathrm{d}}>E_{\mathrm{rs}}^{\mathrm{d}}>E_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{p}} \tag{25}$$

由式(25)进一步可知式(22)成立，则可以确保系统的全局稳定。

3.2 等能量轨线

图 6 为等能量轨线图。图中 C_{eq} 为等能量轨线，轨线上每一个点的能量与点$(x_{\mathrm{b}},0)$相等。因此，等能量轨线应当是忽略阻尼的，即阻尼系数 D 为 0，阻尼引起的耗散能量也为 0，则曲线 C_{eq} 的能量函数可表示为

$$\frac{y^2}{2}+G(x)=G(x_{\mathrm{b}})=E_{\mathrm{b}} \tag{26}$$

定理 2：等能量轨线 C_{eq} 始终处于上半平面临界曲线 $C_{\min}$ 的下方。

证明：点 $F(x_{\mathrm{f}},y_{\mathrm{f}})$和 $H(x_{\mathrm{h}},y_{\mathrm{h}})$为曲线 C_{eq} 和 $C_{\min}$

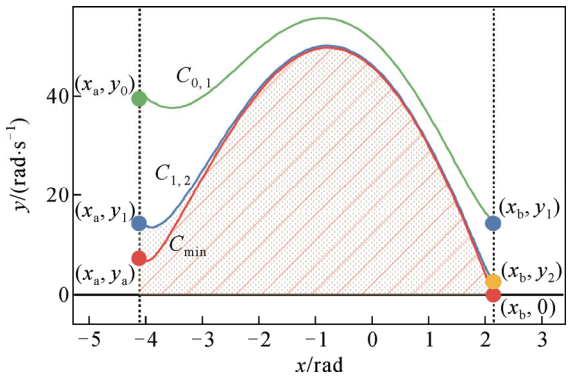


图 5 阻尼引起的最小耗散能的临界轨线

Fig.5 Critical trajectory of minimal dissipated energy induced by damping

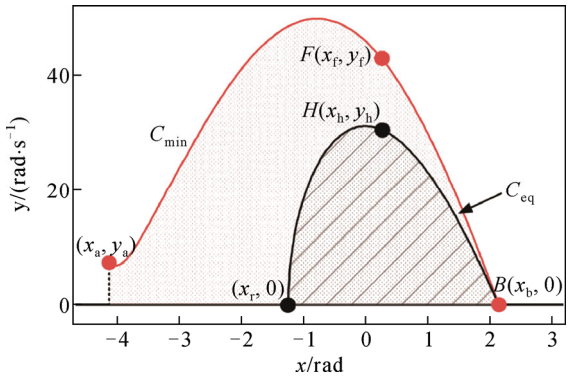


图 6 等能量轨线图

Fig.6 Equal energy system trajectory

上的任意点。当 $x_{\mathrm{f}}\in[x_{\mathrm{a}},x_{\mathrm{r}})$ 时，$C_{\min}$ 位于上半平面，而 C_{eq} 在该区间不存在。当 $x_{\mathrm{f}}\in[x_{\mathrm{r}},x_{\mathrm{b}})$ 时，令 $x_{\mathrm{f}}=x_{\mathrm{h}}$，对于曲线 C_{eq}，从点 $F(x_{\mathrm{f}},y_{\mathrm{f}})$至点 $B(x_{\mathrm{b}},0)$，由式(15)可得

$$E_{\mathrm{f}}-E_{\mathrm{b}}=D\int_{x_{\mathrm{f}}}^{x_{\mathrm{b}}}y\mathrm{d}x>0\Rightarrow E_{\mathrm{f}}>E_{\mathrm{b}} \tag{27}$$

注意到 $E_{\mathrm{f}}=E_{\mathrm{b}}$，则

$$\begin{aligned}&E_{\mathrm{f}}>E_{\mathrm{b}}=E_{\mathrm{h}}\\&\Rightarrow\frac{y_{\mathrm{f}}^2}{2}+G(x_{\mathrm{f}})=\frac{y_{\mathrm{f}}^2}{2}+G(x_{\mathrm{h}})>\frac{y_{\mathrm{h}}^2}{2}+G(x_{\mathrm{h}})\\&\Rightarrow y_{\mathrm{f}}>y_{\mathrm{h}}\end{aligned} \tag{28}$$

因此，点 F 位于点 H 上方。由于点 F 和点 H 为曲线 C_{eq} 和 $C_{\min}$ 上的任意点，可得等能量轨线 C_{eq} 始终处于上半平面临界曲线 $C_{\min}$ 的下方，即 C_{eq} 即为一条特殊的 $\tilde{C}$。

3.3 VSG 阻尼调制方法

对于曲线 C_{eq} 上的任意点 H，由式(26)可得

$$\frac{y^2}{2}=G(x_{\mathrm{b}})-G(x)=\int_{x}^{x_{\mathrm{b}}}g(u)\mathrm{d}u \tag{29}$$

结合式(6)和式(29)得

$$y=\sqrt{2\int_{x}^{x_b}g(u)\mathrm{d}u}=\sqrt{\frac{2U_pU_s}{T_JX_l}(\cos(x+\theta_s)+\cos\theta_s)-\frac{2P_0}{T_J}(x_b-x)} \tag{30}$$

令 y=0，则

$$\frac{U_pU_s}{T_JX_l}(\cos(x_r+\theta_s)+\cos\theta_s)-\frac{P_0}{T_J}(x_b-x_r)=0 \tag{31}$$

结合式(2)，进一步有

$$\cos(x_r+\theta_s)+\cos\theta_s-\sin\theta_s(x_b-x_r)=0 \tag{32}$$

根据式(32)可得 x_r、x_b 的值，则曲线 C_{eq} 与 x 轴围成的面积为

$$S_{eq}=\int_{x_r}^{x_b}y\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2U_pU_s}{T_JX_l}}\cdot\int_{x_r}^{x_b}\sqrt{\cos(x_r+\theta_s)+\cos\theta_s-\sin\theta_s(x_b-x_r)}\mathrm{d}x \tag{33}$$

由式(23)、式(24)和式(33)可得：

$$E_{rs}^{d}=D\int_{x_r}^{x_s}y\mathrm{d}y=\frac{k_dS_{eq}}{T_J}>E_{ab}^{p}=\frac{2\pi P_0}{T_J} \tag{34}$$

$$k_d>\frac{2\pi P_0}{S_{eq}} \tag{35}$$

式(35)给出了 VSG 阻尼系数 k_d 的选取规则。k_d 越大，越有利于系统稳定性。具体地说，假设 k_d 足够大满足式(34)，意味着在任何周期内阻尼引起的耗散能量总是超过势能的减少量，因此系统动能会降低，能够保证 VSG 全局稳定。

3.4 VSG 阻尼调制方法保守性分析

本文提出了使用等能量轨线最小耗散能量的分析估计，以推导出控制参数设计的简易规则。等能量轨线的保守性由阻尼调制方法的保守性刻画。将确保 VSG 系统全局稳定性的最小阻尼系数表示为 k_d*，满足方程

$$E_{ab\,min}^{d}=\frac{k_d^*}{T_J}S_{min}^*=E_{ab}^{p}=\frac{2\pi P_0}{T_J}\Rightarrow k_d^*=\frac{2\pi P_0}{S_{min}^*} \tag{36}$$

式中 S_{min}^* 是阻尼系数为 k_d*时的一个周期内的最小耗散能量。按照 S_{min}^* 设计 k_d*时，由于模型和参数的误差，VSG 系统也可能失去与电网的同步。即使系统能够全局稳定，在受到干扰后，VSG 也需要很长的时间来重新与电网同步。因此，必须确保阻尼调制有足够的保守性，以补偿模型和参数的误差，同时提高系统的动态性能。

引入保守系数 k_c 来量化阻尼调制的保守性，其定义为设定阻尼和最小阻尼系数的比值，即

$$k_c=\frac{k_d}{k_d^*} \tag{37}$$

基于文中利用等能量轨线的分析，临界阻尼系数 k_d^{cr} 为

$$k_d^{cr}=\frac{2\pi P_0}{S_{eq}} \tag{38}$$

结合式(36)—式(38)，所提出的阻尼调制方法的保守性可以表示为

$$k_c=\frac{k_d^{cr}}{k_d^*}=\frac{S_{min}^*}{S_{eq}} \tag{39}$$

式中 S_{eq} 和 k_d^{cr} 是根据式(33)和式(35)确定的，而 k_d* 和 S_{min}^* 可以通过迭代仿真确定。

表 1 给出了所提方法在不同惯性系数下的保守系数。在 T_J=1 的情况下，根据式(38)，基于使用等能量轨线的分析估算，临界阻尼系数为 27.0091，而实际最小阻尼系数为 9.9782。因此，根据式(39)得，保守系数 k_c 为 2.7068。随着 T_J 的增加，k_c 几乎保持不变。表 1 说明了阻尼调制方法的保守性。

4 仿真验证

为了验证本文提出的全局稳定条件的正确性和阻尼调制方法的有效性，在电磁暂态仿真软件 PSCAD/EMTDC 中搭建了 VSG 系统的详细模型。系统结构图如图 1 所示，测试系统的标称电压和标称容量分别为 10 kV 和 10 MW，并网 VSG 的惯性系数为 1。系统主要参数列于表 2 中。

表 1 不同惯性系数下的所提方法的保守系数

Table 1 Conservation of the proposed method with different inertia coefficients

惯性系数 T_J	最小阻尼系数 k_d*	临界阻尼系数 k_d^{cr}	保守系数 k_c
1	9.9782	27.0091	2.7068
2	14.1110	38.2051	2.7075
3	17.2766	46.7875	2.7081

表 2 测试系统主要参数

Table 2 Main parameters of the test system

参数符号	含义及单位	数值
U_s	系统标称电压/kV	10
ω_s	系统标称角频率/(rad·s^{-1})	314.16
S_B	系统标称容量/MW	10
L_c	相电抗器电感/mH	8
L_l	传输线电感/mH	15.9
R_l	传输线电阻/Ω	0.5
P_0	VSC 有功功率参考值/MW	10
U_p	VSC 输出电压参考值/kV	10.5
θ_0	第 0 周期 SEP/rad	0.4963
T_J	VSG 惯性时间常数	1

4.1 模型验证与周期稳定现象

图 7 比较了阻尼系数 k_d=8 时仿真模型与式(1)和式(2)表示的分析模型的动态响应过程。在 3 s 时，PCC 点发生三相金属故障。

当 k_d=8 时，系统的临界切除时间为 103 ms。图 7(a)和图 7(b)分别为故障清除时间 t_c=80 ms 时 VSG 的相角 θ 和角速度ω_c的动态响应，由于 VSG 的有功功率 P_e 在故障后突变，使得等式(1)表示的 VSG 控制方程的右侧不再为 0，导致θ和ω_c变化。经过大约 2 s 的暂态过程后，θ和ω_c恢复到初始平衡状态。然而，当 t_c增加到 120 ms 时，从图 7(c)和图 7(d)可以看出，θ单调增加，ω_c 等幅振荡，这表明 VSG 失去同步稳定性。随着故障清除时间 t_c的延长，故障期间积累的能量增加，因此系统轨线可以穿过初始平衡点的吸引域。并且由于阻尼不足，VSG 系统在后续时间无法稳定。从图 7 可以看出，当 k_d=8 时，系统暂态稳定性与故障清除时间密切相关。当故障清除时间 t_c 相对较小时，系统轨线不会超过 UEP，VSG 系统保持同步稳定性。然而，当 t_c 大于临界故障清除时间时，系统轨线接触 UEP，系统不稳定。这种暂态稳定现象在本文中称为局部稳定性。

图 8 为阻尼系数 k_d=10 时 2 种模型下 VSG 系统的动态响应。当 k_d=10 时，系统的临界切除时间为 111 ms。当故障清除时间 t_c=80 ms 时，VSG 的相角 θ 和角速度ω_c的动态响应与阻尼系数 k_d=8 时相似。从图 8(a)和图 8(b)可以看出，系统稳定在第 0 周期的 SEP 上(即初始平衡点)。然而，当 t_c增加到 120 ms 时，从图 8(c)中可以看出，相角 θ 相继穿过第 1 周期和第 2 周期的 UEP($\theta_{uep,1}$和$\theta_{uep,2}$)，最终收敛到第 2 周期的 SEP($\theta_{(0),2}$)上。相应地，如图 8(d)所示，角速度ω_c经过一个暂态过程后恢复至标称值。由于阻尼效应，VSG 表现出周期稳定特性。从图 8 可以看

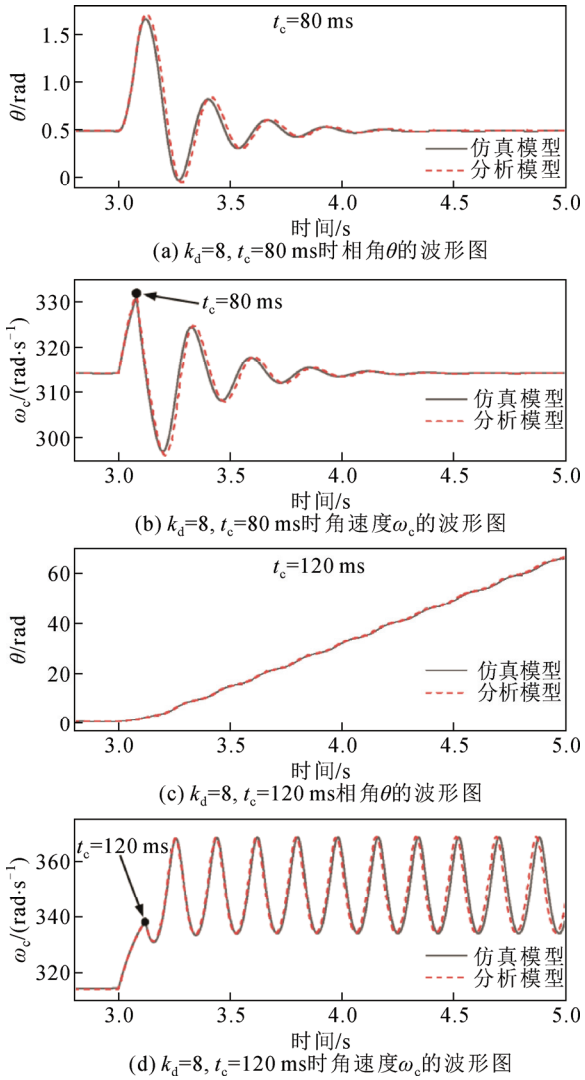


图 7 k_d=8 时局部稳定场景的动态波形图

Fig.7 Dynamics of local stability scenarios with k_d=8

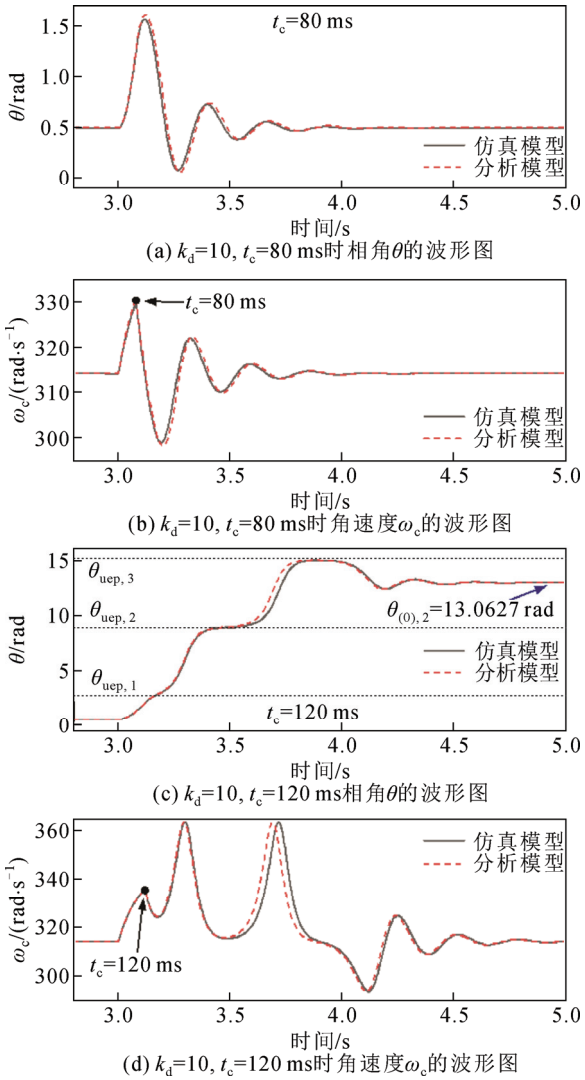


图 8 k_d=10 时全局稳定场景的动态波形图

Fig.8 Dynamics of global stability scenarios with k_d=10

出，当 k_d=10 时，无论故障清除时间如何，系统都能保持稳定，本文称这一暂态稳定现象为全局稳定性。

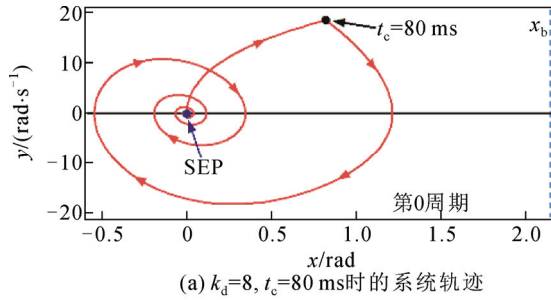
此外，从图 7 和图 8 可以看出，在各种场景下，用虚线表示的分析模型的动态过程与用实线表示的仿真模型的动态过程都非常接近，验证了 VSG 同步稳定性分析模型的有效性。

4.2 全局稳定条件的正确性

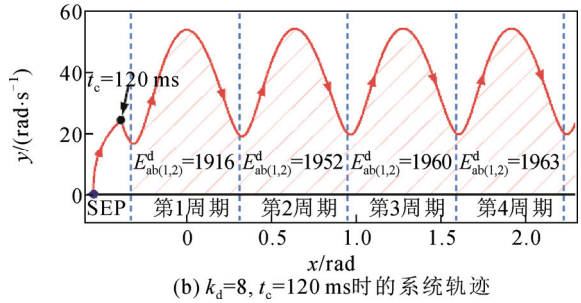
将式(4)的坐标变换应用于仿真数据，图 9 是阻尼系数 k_d =8 时测试系统的相平面图，图 10 为 k_d=8 时不同故障清除时间下系统动态波形图，在 3 s 时，PCC 点发生三相金属故障。从图 9(a)中可以看出，当 t_c=80 ms 时，系统轨线不超过 x_b，并逐渐收敛到原点(第 0 周期的 SEP)，这表明系统在受扰后保持稳定。当 t_c 延长至 120 ms 时，系统轨线超出原点的吸引域。由式(7)可得，每个周期势能的递减量为 1973.92。如图 9(b)所示，根据式(19)计算每个后续周期中由阻尼引起的耗散能量，该能量低于一个周期内的势能变化。因此，ω_c 将增加，这反过来又放大了阻尼耗散能量。ω_c 逐渐增加，直到耗散的能量等于一段时间内的势能变化。在这种情况下，θ继续上升，而ω_c 在每个周期内随着动能和势能交换而振荡，这很好地解释了图 7(c)和图 7(d)所示的θ和ω_c 的动态响应。

图 10(a)、(b)、(c)和(d)分别为不同故障清除时间时 VSG 的相角、角速度、有功功率和无功功率的动态响应波形图。当故障切除时间 t_c=80 ms 时，故障后 VSG 的相角、角速度、有功功率和无功功率在经过大约 2 s 的暂态过程后，恢复到初始平衡状态；而当故障切除时间 t_c=120 ms 时，故障后 VSG 的相角呈现单调递增状态，VSG 的角速度、有功功率和无功功率出现明显振荡，表明 VSG 失去同步稳定性。可见，k_d=8 时，VSG 能否保持同步稳定与故障清除时间密切相关，呈现出局部稳定特性。

图 11 是阻尼系数 k_d=10 时测试系统的相平面图。当 t_c=80 ms 时，系统轨线稳定在原点上，如图 11(a)所示。当 t_c 延长至 120 ms 时，系统轨线超过第 1 周期的 UEP。按照现有的首摆稳定性分析方法，VSG 系统应该会失稳。然而，如图 8(b)所示，系统轨线穿过 2 个 UEP，并逐渐稳定于第 2 周期的 SEP。这种现象是由 VSG 的阻尼效应引起的。根据式(19)计算第 1 周期的阻尼引起的耗散能量计算为 2030.68，耗散的能量超过了第 1 周期的势能变化，



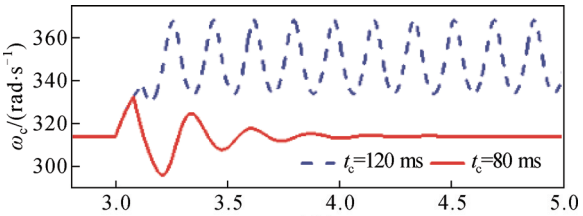
(a) k_d=8, t_c=80 ms时的系统轨迹



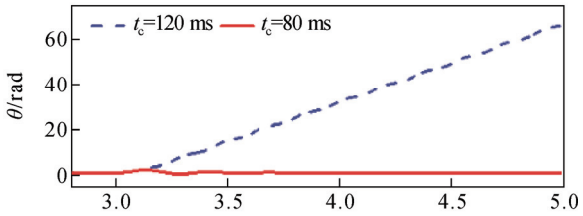
(b) k_d=8, t_c=120 ms时的系统轨迹

图 9 k_d=8 时局部稳定场景的相位图相平面图

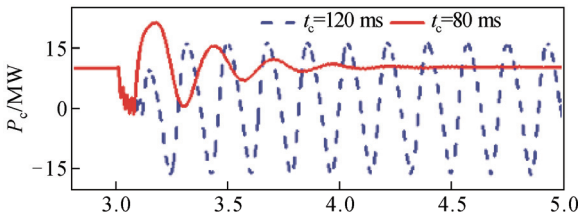
Fig.9 Phase portrait of local stability scenarios with k_d=8



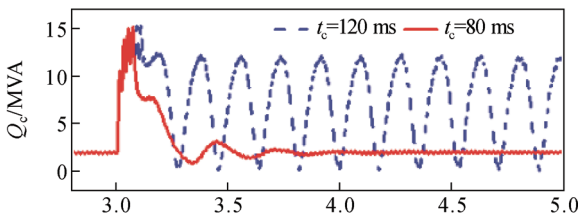
(a) k_d=8, 不同t_c下角速度ω_c的波形图



(b) k_d=8, 不同t_c下相角θ的波形图



(c) k_d=8, 不同t_c下有功功率P_c的波形图



(d) k_d=8, 不同t_c下无功功率Q_c的波形图

图 10 k_d=8 时不同故障清除时间下系统动态波形图

Fig.10 Dynamics under different fault clearing times with k_d=8

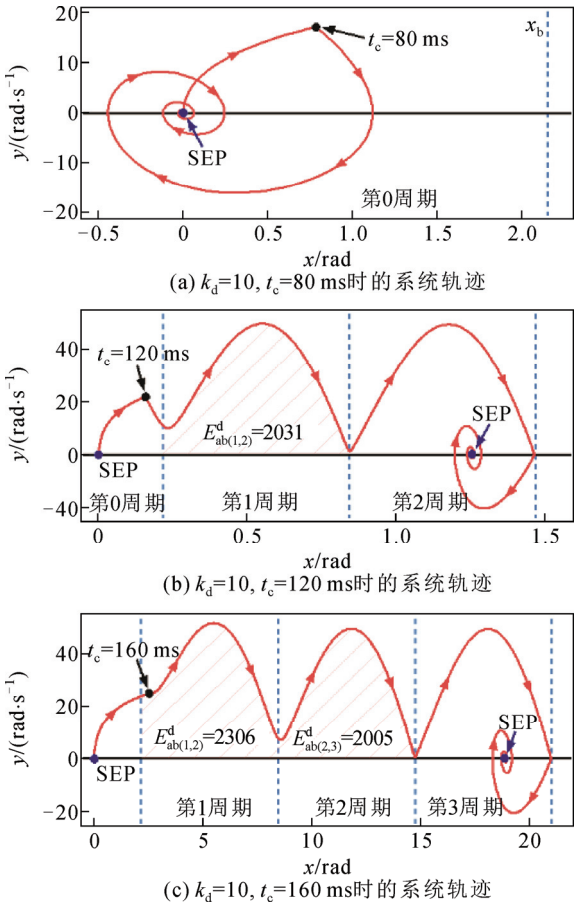


图 11 k_d =10 时全局稳定场景的相平面图

Fig.11 Phase portrait of global stability scenarios with k_d=10

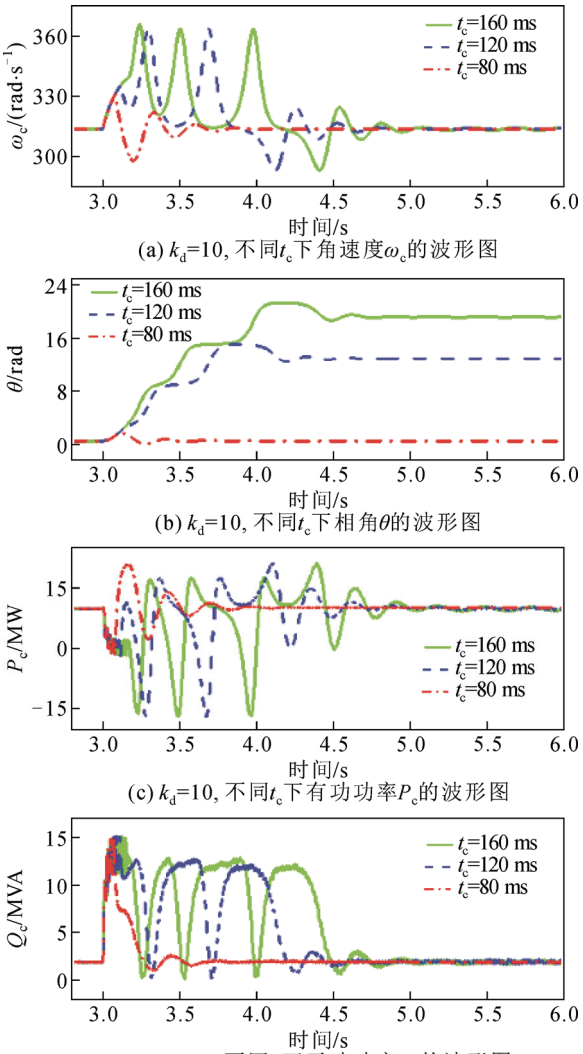


图 12 k_d =10 时不同故障清除时间下系统动态波形图

Fig.12 Dynamics under different fault clearing times with k_d=10

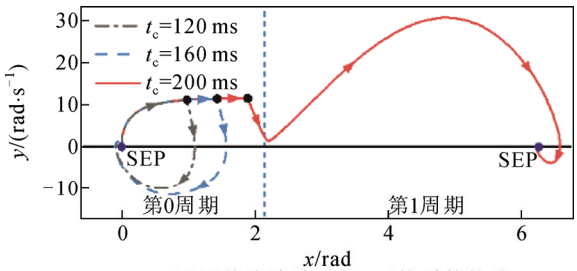
导致ω_c降低。同样，当 t_c 延长至 160 ms 时，系统轨线连续超过第 1—3 周期的 UEP，最后收敛到周期 3 的 SEP，如图 11(c)所示。通过构建 k_d=10 的临界曲线 C_{min}，根据式(20)计算出一个周期的最小耗散能量 $E^d_{ab\,min}$ 为 2001.16。从图 11(b)、(c)中可以看出，任何周期内阻尼耗散能量均大于 $E^d_{ab\,min}$，因而也大于一个周期内势能的减小量。基于定理 1，无论故障清除时间如何，VSG 都能保持全局稳定。

图 12 为 k_d=10 时不同故障清除时间下系统的动态波形图。在 3 s 时，PCC 点发生三相金属故障。图 12(a)、(b)、(c)和(d)分别为不同故障清除时间下 VSG 的相角、角速度、有功功率和无功功率的动态响应波形图。由图 12 可以看出，无论故障清除时间如何，系统总能保持稳定，即使系统首摆或者第 2 摆不稳定，也能稳定在后续周期的 SEP 上。因此，当 k_d=10 时，VSG 表现出全局稳定特性。图 9—图 12 验证了本文提出的全局稳定性条件的正确性。

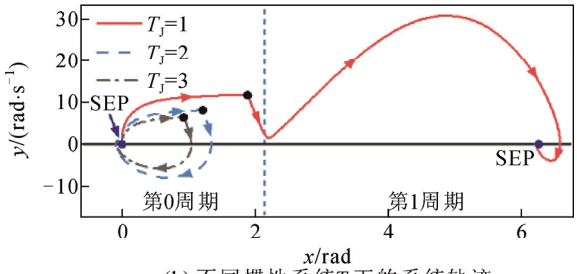
4.3 阻尼调制方法的有效性

图 13 是应用所提阻尼调制方法后测试系统相平面图。基于式(38)、式(39)及式(41)，选择测试系统阻尼系数 k_d=27.01。

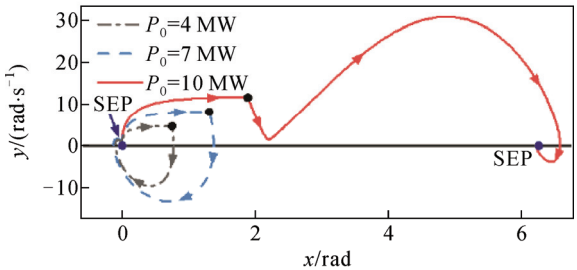
图 13(a)描绘了不同故障清除时间下的系统动态响应。对比图 11 和图 13(a)，阻尼调制方法延长了临界故障清除时间。更重要的是，即使 t_c 大于临界值，系统轨线也可以收敛到后续周期的 SEP，从而使系统保持全局稳定。图 13(b)比较了 t_c=200 ms 时不同惯性系数下的系统动态。根据所提阻尼调制方法，当 T_J=2 时，选择阻尼系数 k_d=38.21；当 T_J =3 时，选择阻尼系数 k_d=46.79。从图 13(b)可以看出，随着 T_J的增加，系统轨线不会越过第 1 周期的 UEP，并稳定在原点上，说明 T_J的增加有利于 VSG 的首摆稳定性。同时，由式(6)可知，随着 T_J增加，阻尼系数 D 减小，从而削弱了系统的全局稳定性。因此，对于模拟惯量较大的 VSG，应当选择足够大的 k_d。



(a) 不同故障清除时间t_c下的系统轨迹



(b) 不同惯性系统T_J下的系统轨迹



(c) 不同功率设定值P_0下的系统轨迹

图 13 采用阻尼整定调制规则在各种场景下的相位图相平面图

Fig.13 Phase portrait with the proposed damping tuning method under various scenarios

图 13(c)描绘了当 t_c=200 ms 时，不同工作点下的系统轨线。根据阻尼调制方法，当 P_0=4 MW 时，选取阻尼系数 k_d=5.70；当 P_0=7 MW 时，选取阻尼系数 k_d=13.41。可以看出，增加 VSG 的输出有功功率不利于同步稳定性，这是因为每个周期内势能减小量会随着 P_0 的增加而增加；此时，需要更大的 k_d 来增加阻尼耗散能量。为了保证 VSG 系统在不同工作点下的同步稳定性，阻尼设计时应考虑换流器最大传输容量。图 13 表明 VSG 系统在各种故障清除时间、控制参数和工作条件下都能保持全局稳定，验证了所提出的阻尼调制方法的有效性。

5 结论

1）本文分析了计及阻尼效应的 VSG 系统同步稳定性。基于能量守恒定律，证明了阻尼耗散能量等于阻尼系数乘以相平面上系统轨线和 x 轴包围的面积。

2）当每个周期内阻尼耗散能量大于势能变化量时，系统可以维持全局稳定。此时，无论故障清除时间如何，系统轨线一定会收敛到某个周期的 SEP 处。

3）虽然增大惯性系数有利于首摆稳定性，却不利于全局稳定。此外，较小的阻尼系数或重载运行工况不利于 VSG 系统的同步稳定性。

本文的主要贡献在于发现了 VSG 并网系统的全局稳定现象并导出了全局稳定条件，进一步推导出解析且保守的阻尼调制规则。本文的研究结果有望为未来高可再生能源渗透电力系统的稳定运行提供一定的理论指导。

附录见本刊网络版(http://hve.epri.sgcc.com.cn)。

参考文献 References

[1] 王渝红，陈 勇，曾 琦，等. 适用于 VSC-MTDC 的改进下垂控制[J]. 高电压技术，2018，44(10)：3190-3196.
WANG Yuhong, CHEN Yong, ZENG Qi, et al. Improved droop control strategy for VSC-MTDC[J]. High Voltage Engineering, 2018, 44(10): 3190-3196.

[2] 杨洪耕，赵 曦，王 迪，等. 孤岛微电网电压源型逆变器和 SVC 交互影响分析[J]. 高电压技术，2017，43(10)：3273-3279.
YANG Honggeng, ZHAO Xi, WANG Di, et al. Analysis on interactive influences between voltage source inverter and SVC in an islanded micro-grid[J]. High Voltage Engineering, 2017, 43(10): 3273-3279.

[3] GUAN L, YAO J, LIU R K, et al. Small-signal stability analysis and enhanced control strategy for VSC system during weak-grid asymmetric faults[J]. IEEE Transactions on Sustainable Energy, 2021, 12(4): 2074-2085.

[4] LU Y Y, DU Z C, LI Y J, et al. Nonlinear damping property and limit cycle of VSC[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2022, 37(5): 4485-4488.

[5] 张哲任，金砚秋，徐 政. 两种基于构网型风机和二极管整流单元的海上风电送出方案[J]. 高电压技术，2022，48(6)：2098-2107.
ZHANG Zheren, JIN Yanqiu, XU Zheng. Two offshore wind farm integration schemes based on grid forming wind turbines and diode rectifier unit[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(6): 2098-2107.

[6] 胡宇飞，田 震，查晓明，等. 构网型与跟网型变流器主导孤岛微网阻抗稳定性分析及提升策略[J]. 电力系统自动化，2022，46(24)：121-131.
HU Yufei, TIAN Zhen, ZHA Xiaoming, et al. Impedance stability analysis and promotion strategy of islanded microgrid dominated by grid-connected and grid-following converters[J]. Automation of Electric Power Systems, 2022, 46(24): 121-131.

[7] 马秀达，卢 宇，田 杰，等. 柔性直流输电系统的构网型控制关键技术与挑战[J]. 电力系统自动化，2023，47(3)：1-11.
MA Xiuda, LU Yu, TIAN Jie, et al. Key technologies and challenges of grid-forming control for flexible DC transmission system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2023, 47(3): 1-11.

[8] WU H, WANG X F. Design-oriented transient stability analysis of grid-connected converters with power synchronization control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(8): 6473-6482.

[9] 邢鹏翔，付立军，王 刚，等. 改善微电网频率动态响应的虚拟同

步发电机强化惯量控制方法[J]. 高电压技术，2018，44(7)：2346-2353.
XING Pengxiang, FU Lijun, WANG Gang, et al. Control strategy of virtual synchronous generator with enhanced inertia for improving dynamic frequency response of microgrid[J]. High Voltage Engineering, 2018, 44(7): 2346-2353.

[10] 杜 燕，朱 轲，杨向真，等. 考虑频率耦合的 VSG 虚拟阻抗优化设计[J]. 高电压技术，2022，48(12)：5057-5067.
DU Yan, ZHU Ke, YANG Xiangzhen, et al. Optimal design of virtual synchronous generator virtual impedance considering frequency coupling[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(12): 5057-5067.

[11] LEON A E, MAURICIO J M. Virtual synchronous generator for VSC-HVDC stations with DC voltage control[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2023, 38(1): 728-738.

[12] XIONG X L, WU C, BLAABJERG F. Effects of virtual resistance on transient stability of virtual synchronous generators under grid voltage sag[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2022, 69(5): 4754-4764.

[13] PAN D H, WANG X F, LIU F C, et al. Transient stability of voltage-source converters with grid-forming control: a design-oriented study[J]. IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, 2020, 8(2): 1019-1033.

[14] WU H, WANG X F. A mode-adaptive power-angle control method for transient stability enhancement of virtual synchronous generators[J]. IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, 2020, 8(2): 1034-1049.

[15] ROKROK E, QORIA T, BRUYERE A, et al. Transient stability assessment and enhancement of grid-forming converters embedding current reference saturation as current limiting strategy[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2022, 37(2): 1519-1531.

[16] GE P J, TU C M, XIAO F, et al. Design-oriented analysis and transient stability enhancement control for a virtual synchronous generator[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2023, 70(3): 2675-2684.

[17] 陈 谦，周文海，何承树，等. 采用三阶模型的虚拟同步发电机功率振荡特性分析及附加阻尼控制[J]. 高电压技术，2023，49(2)：682-690.
CHEN Qian, ZHOU Wenhai, HE Chengshu, et al. Characteristics analysis and suppression of power oscillation of virtual synchronous generator using three-order model[J]. High Voltage Engineering, 2023, 49(2): 682-690.

[18] 刘 航，王 跃，刘永慧，等. 基于定量设计虚拟阻抗的 VSG 低电压穿越策略[J]. 高电压技术，2022，48(1)：245-256.
LIU Hang, WANG Yue, LIU Yonghui, et al. The LVRT strategy for VSG based on the quantitatively designed virtual impedance[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(1): 245-256.

[19] KUNDUR P S, MALIK O P. Power system stability and control[M]. 2nd ed. New York, USA: McGraw-Hill Education, 2022.

[20] FU X K, SUN J J, HUANG M, et al. Large-signal stability of grid-forming and grid-following controls in voltage source converter: a comparative study[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2021, 36(7): 7832-7840.

[21] CHENG H J, SHUAI Z K, SHEN C, et al. Transient angle stability of paralleled synchronous and virtual synchronous generators in islanded microgrids[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2020, 35(8): 8751-8765.

[22] DRAZIN P G. Nonlinear systems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[23] 姜卫同，胡鹏飞，尹 瑞，等. 基于虚拟同步机的变流器暂态稳定分析及混合同步控制策略[J]. 电力系统自动化，2021，45(22)：124-133.
JIANG Weitong, HU Pengfei, YIN Rui, et al. Transient stability analysis and hybrid synchronization control strategy of converter based on virtual synchronous generator[J]. Automation of Electric Power Systems, 2021, 45(22): 124-133.

[24] TANG Y J, TIAN Z, ZHA X M, et al. An improved equal area criterion for transient stability analysis of converter-based microgrid considering nonlinear damping effect[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2022, 37(9): 11272-11284.

[25] SHUAI Z K, SHEN C, LIU X, et al. Transient angle stability of virtual synchronous generators using Lyapunov's direct method[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2019, 10(4): 4648-4661.

[26] ZHAO F, SHUAI Z K, HUANG W, et al. A unified model of voltage-controlled inverter for transient angle stability analysis[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2022, 37(3): 2275-2288.

[27] 高 振，雷为民，赵 峰，等. 基于 Lyapunov 直接法的虚拟同步发电机并网暂态稳定性分析[J]. 浙江电力，2019，38(10)：52-60.
GAO Zhen, LEI Weimin, ZHAO Feng, et al. Transient stability analysis on virtual synchronous generators integration based on Lyapunov's direct method[J]. Zhejiang Electric Power, 2019, 38(10): 52-60.



杨银国
1980—，男，硕士，教授级高工
主要研究方向为新能源、电力系统
E-mail: yangyinguo@gddd.csg.cn

YANG Yinguo
Professor



戴耀辉(通信作者)
1999—，男，硕士生
主要研究方向为电力系统运行控制
E-mail: dyh1499973952@stu.xjtu.edu.cn

DAI Yaohui
Corresponding author

收稿日期 2023-01-06 修回日期 2023-03-13 编辑 何秋萍

附录 A

能量函数的构造

假设$V:D\to R$是一个连续可微的函数，使得：

$$\begin{cases}V(0)=0\\V(x)>0,x\in D且x\neq 0\end{cases} \tag{A1}$$

$$\dot{V}(x)\le 0，\ x\in D \tag{A2}$$

那么，x=0 是稳定的。满足式(A1)和式(A2)的连续微分函数 $V(x)$被称为李雅普诺夫能量函数[22]。

从能量函数的定义看，其在原点的值必须为 0，并且当$x\neq 0$时，函数值大于 0。为了满足式(A1)，能量函数通常选取二次型函数，因此能量函数可取为

$$V(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2} \tag{A3}$$

其对时间的导数为

$$\dot{V}(x,y)=y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{A4}$$

结合系统方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x)-Dy\end{cases} \tag{A5}$$

进一步有

$$\dot{V}(x,y)=y(-g(x)-Dy)+xy \tag{A6}$$

通过式(A6)难以判断其正负号。因此对 $V(x,y)$进行调整，使得

$$\dot{V}(x,y)=y(-g(x)-Dy)+g(x)y=-Dy^2 \tag{A7}$$

由此可推得能量函数 $E(x,y)$为

$$\begin{cases}E(x,y)=\dfrac{y^2}{2}+G(x),\quad G(x)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u\\[2ex]\dot{E}(x,y)=y(-g(x)-Dy)+g(x)y=-Dy^2\le 0\end{cases} \tag{A8}$$

附录 B

定理 1 的推导过程

证明：在相平面图中，同一自治系统的不同轨线($C_{k,k+1}$，$k\in\mathbb{Z}$)在空间中不相交。对于任意轨线$C_{k,k+1}$，$k\in\mathbb{Z}$，$y_k>0$，$y_{k+1}>0$，都在临界曲线 $C_{\min}$的上方。因此，由正文中式(19)和式(20)得

$$E^{\mathrm{d}}_{\mathrm{ab}\min}<E^{\mathrm{d}}_{\mathrm{ab}(k,k+1)},k\in\mathbb{Z} \tag{B1}$$

结合正文中式(21)可得

$$E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}<E^{\mathrm{d}}_{\mathrm{ab}\min}<E^{\mathrm{d}}_{\mathrm{ab}(k,k+1)} \tag{B2}$$

结合正文中式(18)，进一步可得

$$\frac{y_{k+1}^2}{2}-\frac{y_k^2}{2}=E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}-E^{\mathrm{d}}_{\mathrm{ab}(k,k+1)}<0\Rightarrow y_{k+1}<y_k \tag{B3}$$

不等式(B3)表明，如果正文中式(21)满足，则一个周期内系统轨线速度会降低。由式(B3)进一步可得

$$0<y_n<\cdots<y_{k+1}<y_k<\cdots<y_0 \tag{B4}$$

特别地，如果

$$y_n^2/2<E^{\mathrm{d}}_{\mathrm{ab}(n,n+1)}-E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}} \tag{B5}$$

基于式(B3)和式(B5)，下列不等式成立。

$$0-\frac{y_n^2}{2}<E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}-E^{\mathrm{d}}_{\mathrm{ab}(n,n+1)}=\frac{y_{n+1}^2}{2}-\frac{y_n^2}{2}\Rightarrow 0>\frac{y_{n+1}^2}{2} \tag{B6}$$

式(B6)意味着 y_{n+1}不存在，导致矛盾。换言之，系统不会越过第 n+1 周期的 UEP，系统轨线最终会收敛到第 n 周期的 SEP 上。

附录 C

式(41)中 $E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}$ 的推导

$E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}$ 为系统的势能变化量，根据正文中式(18)可知

$$E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}=G(x_{\mathrm{a}})-G(x_{\mathrm{b}})=\int_0^{x_{\mathrm{a}}}g(u)\mathrm{d}u-\int_0^{x_{\mathrm{b}}}g(u)\mathrm{d}u=\int_{x_{\mathrm{b}}}^{x_{\mathrm{a}}}g(u)\mathrm{d}u \tag{C1}$$

又因为 a、b 为系统轨线在一个周期内的两个端点，因此 $x_{\mathrm{b}}=x_{\mathrm{a}}+2\pi$，进一步得

$$E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}=\int_{x\mathrm{b}}^{x_{\mathrm{a}}}g(u)\mathrm{d}u=-\int_{x_{\mathrm{a}}}^{x_{\mathrm{a}}+2\pi}g(u)\mathrm{d}u \tag{C2}$$

根据正文中式(6)知，$g(x)$ 的第一项为正弦项，一个周内积分为 0，因此

$$E^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ab}}=-\int_{x_{\mathrm{a}}}^{x_{\mathrm{a}}+2\pi}g(u)\mathrm{d}u=-\int_{x_{\mathrm{a}}}^{x_{\mathrm{a}}+2\pi}-\frac{P_0}{T_{\mathrm{J}}}\mathrm{d}u=\frac{2\pi P_0}{T_{\mathrm{J}}} \tag{C3}$$