第 49 卷 第 6 期：2420-2431 高电压技术 Vol.49, No.6: 2420-2431
2023 年 6 月 30 日 High Voltage Engineering June 30, 2023
DOI: 10.13336/j.1003-6520.hve.20230165

换流变阀侧套管极性反转暂态电场模型降阶

王青于[1]，楚智霖[1]，程建伟[2]，张昊煜[1]，刘　鹏[1]，彭宗仁[1]
（1. 西安交通大学电力设备电气绝缘国家重点实验室，西安 710049;
2. 南方电网科学研究院有限责任公司，广州 510663）

摘　要：随着以新能源为主体的新型数字化电力系统建设，实现主设备的数字孪生体系是未来数字电网的重要发展趋势，使用模型降阶方法提高计算效率并实现快速实时仿真，是数字孪生应用于电力设备多物理场仿真领域的重要基础。为此提出了一种基于本征正交分解(proper orthogonal decomposition，POD)法求解换流变阀侧套管极性反转暂态电场的有限元快速计算方法，应用伽辽金有限元数值计算方法编程建立了换流变阀侧套管暂态电场刚度矩阵，提出了换流变阀侧套管芯体铝箔极板悬浮电位边界设置的强加虚拟齐次边界条件与稀疏矩阵联合的算法，通过矩阵奇异值分解对处理后的矩阵进行了主成分提取，构建了换流变阀侧套管电场降阶模型。研究结果表明，采用模型降阶方法得到的套管电场分布与商用软件计算的结果相近，同时，采用轻量化模型计算套管电场分布所需时间被大幅缩减，验证了模型降阶方法具有较高的准确性和计算效率，证明了采用模型降阶方法实现套管这种电力设备电场的快速计算和实时仿真的可行性。

关键词：换流变阀侧套管；极性反转电场；本征正交分解；模型降阶；快速计算

Reduced Order Model of Polarity Reversal Transient Electric Field of Converter Transformer Valve-side Bushing

WANG Qingyu[1], CHU Zhilin[1], CHENG Jianwei[2], ZHANG Haoyu[1], LIU Peng[1], PENG Zongren[1]
(1. State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. Electric Power Research Institute of CSG, Guangzhou 510663, China)

Abstract：New digital power system in which new energy is taken as the main body is increasingly constructed, thus it is an important development trend of the future digital power grid to realize the digital twin system of the main equipment. Using model reduction method to improve calculation efficiency and realize fast real-time simulation is an important basis for the application of digital twins in the multi physical field simulation of power equipment. In this paper, based on proper orthogonal decomposition(POD) method, a fast finite element calculation method for solving polarity reversal transient electric field of converter transformer valve-side bushings is proposed. The Galerkin finite element numerical calculation method is applied to establish the electric field stiffness matrix of converter transformer valve-side bushings. The combined algorithm of imposing the virtual homogeneous boundary condition and sparse matrix is proposed for setting the potential boundary of the aluminum foil plate of the core. The processed matrix is extracted with principal components through matrix singular value decomposition, and the electric field reduced order model for converter transformer valve-side bushings is constructed. The results show that the electric field distribution of the converter transformer valve-side bushing obtained by the model reduction method in this paper is similar to the results calculated by commercial software. At the same time, the time required to calculate the electric field distribution of the bushing using the lightweight model is greatly reduced, which verifies that the reduction method has high accuracy and calculation efficiency.The feasibility of fast calculation and real-time simulation of electric field of power equipment such as bushings using model reduction method is proved.

Key words：converter transformer valve-side bushing; polarity reversal electric field; proper orthogonal decomposition; model reduction; fast calculation

基金资助项目：南方电网公司科技项目(GDKJXM20222106)。
Project supported by Science and Technology Project of CSG (GDKJXM20222106).

0 引言

电力设备的数字孪生是充分利用物理模型、传感器更新、运行历史等数据，基于多物理量、多尺度、多概率的仿真过程，在虚拟空间中完成映射，从而反映相对应的实体设备的全生命周期过程[1-5]。基于传统有限元的多物理场仿真技术，当目标设备达到一定体量后，其网格计算节点数量成规模增长，尤其是几何上跨越多个尺度的模型，将造成较大计算量严重制约计算效率的问题，多物理场仿真迭代收敛速度慢已成为制约电力设备全景感知信息融合的内特性可视化与实时评估分析的瓶颈。因此，为了实现电力设备虚实空间实时的映射和多物理场的快速计算，开发模型降阶方法是关键。

模型降阶方法包括本征正交分解(proper orthogonal decomposition，POD)法、缩减基法(reduced-basis method，RBM)、Krylov 子空间法、平衡截断法等。RBM 是通过输入不同的参数值，在参数域求解少量的经典有限元解，以这些具有物理含义的解数据构造基空间，从而可将有限元方程组转化为阶次较低的线型方程组求解，是求解含参数的偏微分方程的有效方法，广泛应用于控制、优化和特征值等问题[6-7]。例如 MILANI R 等人采用缩减基法求解了线弹性问题中的多参数方程[8]，LIU G R 等人基于缩减基法提出了一种计算复杂工程系统对流扩散常数的新方法，显著降低了复杂系统的反向分析问题的效率[9]，SHI Y T 等人将传统的边界元法(boundary element method，BEM)与 RBM 相结合，并提出了一种缩减基边界元方法(reduced-basis boundary element method，RB-BEM)，以实现介质散射体参数化电磁散射问题的有效求解[10]。平衡截断法是 1981 年 Moore 以控制理论为基础首先提出的一种模型降阶方法，该方法通过求解 Lyapunov 方程得到可控 Gram 矩阵和可观 Gram 矩阵，进而得到平衡系统，将平衡可控 Gram 矩阵和平衡可观 Gram 矩阵上对应较小奇异值的状态向量截断，即可完成模型的降阶[11]。平衡截断法的优势在于降阶后的系统与原始系统具有相同的稳定性，并且迭代优化过程的复杂度较低；不足之处在于求解 Lyapunov 方程时的计算量较大，尤其是计算大规模系统时。近年来，线性矩阵方程的快速数值求解法对平衡截断法的发展起到了极大的促进作用。Krylov 子空间法的基本原理是通过构造适当的变换矩阵，使得变换矩阵的列张成的空间能包含在适当的 Krylov 子空间中，来实现模型降阶，主要算法包括 Arnoldi 算法和 Lanczos 算法[12-13]。谷宇等人结合非结构矢量有限元和有理 Krylov 子空间法，成功实现了各向异性介质中海洋可控源电磁三维正演求解[14]，BÖRNER R U 等人基于有理 Krylov 方法求解了瞬态磁场问题[15]，SUMANT P 等人基于 Krylov 子空间投影方法求解了具有随机参数的无源电磁器件的电磁响应问题[16]。

本征正交分解模型降阶方法是通过选择一组试验数据样本集来构造降阶过程中所需要的变换矩阵来达到降阶的目的。这类方法本身隐含着模型降阶的思想——用低维数据来表示高维数据集的特征信息，目前在航天、电气和数理统计等多个领域有着广泛的应用[17-18]。WANG Z 等人应用 POD(本征正交分解)方法快速计算了圆柱内流体湍流模型，并验证了降阶方法的合理性[19]。羊静运用模态分析和 LS-DYNA 平台在动态碰撞条件下同时对飞机结构和乘客碰撞力学和生物力学进行了研究，并利用 POD 降阶方法提高了碰撞模拟的计算效率[20]。THOMAS J P 研究了基于本征正交分解的非定常降阶建模技术的空气动力学仿真，指出 POD/本征正交分解/快速计算(reduced-order modeling，ROM)方法对跨声速气动弹性多结构设计研究非常有用[21]。何江等人采用 POD 方法研究了竖直平板间自然对流问题，用 POD 降阶计算方法，得到了广义“能量”在各模态间的分布，通过 POD 方法重构了流场，用较少的模态捕捉到了该流场的主要信息[22]。可见国内外学者对 POD 降阶计算方法的应用研究较为广泛，奠定了扎实的理论基础，但目前针对电力设备多物理场快速计算的研究较少，尤其是针对高压套管轻量化模型和降阶计算方法的研究几乎没有。

高压套管作为电力系统的重要设备，其运行可靠性直接关系到电网的安全稳定运行，随着电网对设备数字化、智能化要求的不断提升，传感监测数据取得后数据的利用、对运行维护的指导需要多物理场仿真技术的支撑。然而高压套管尺寸比大，内、外绝缘问题突出，多尺度复杂结构的网格节点众多，有限元求解矩阵阶数非常高，计算求解耗时非常久，特别是进行暂态电场仿真时，由于涉及套管气/固和固/固界面电荷积累和消散过程，导致数值求解迭代次数多，常规全阶电场仿真计算无法实现套管电力设备的实时仿真和可视化状态评估，制约了其在线

实时可视化评估的应用。

因此，为适应数字技术与传统电网融合发展中设备内特性状态可视化的需求，攻克套管电场特性实时仿真的原创共性关键技术，本文采用伽辽金加权余量有限元法建立了求解换流变阀侧套管全模型暂态电场的离散方程。基于构建的有限元方程，求解了套管电场的快照矩阵；基于得到的样本数据，将套管节点电位映射到了一组正交基特征向量张成的低维空间中。考虑套管芯体多层极板的结构特点，采用强加虚拟齐次边界条件与稀疏矩阵联合的算法设置了套管芯体悬浮电位边界条件，最终实现了套管暂态电场方程组的快速计算。通过商业软件构建了套管正演算例的基准测试集，对比分析了套管暂态电场正演秒级快速计算与有限元结果，测评估了原模型和降阶模型的计算效果。本文研究成果可有效支撑电力装备本质安全、推升原创快速仿真技术竞争力。

1 有限元数值计算原理与边界条件处理

1.1 二维轴对称电流场的有限元原理

有限元是一种为求解偏微分方程边值问题近似解的数值技术。求解时对整个问题区域进行分解，每个子区域都成为简单的部分。计算暂态电场时，由麦克斯韦方程组可推得暂态电场满足的偏微分方程为

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\ \boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度；$\boldsymbol{E}$ 为电场强度；$\boldsymbol{J}$ 为传导电流密度；$\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量；ε为媒质的介电常数；γ 为媒质的电导率。由麦克斯韦方程组式(1)的第 1 个公式求散度可以推出直流暂态电场的方程，即

$$\nabla\cdot(\gamma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})=0\tag{2}$$

将式(2)中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 用电位 φ 的负梯度表示，则得

$$\nabla\cdot(\gamma\nabla\varphi+\varepsilon\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t})=0\tag{3}$$

将式(3)中的时间 t 微分项差分离散得式(4)，整理移项得式(5)：

$$\nabla\cdot(\gamma\nabla\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}+\varepsilon\nabla\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{\Delta t})=0\tag{4}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon+\frac{\Delta t}{2}\gamma)\nabla\varphi_{k+1}=\nabla\cdot(\varepsilon-\frac{\Delta t}{2}\gamma)\nabla\varphi_k\tag{5}$$

式中：Δt 为时间步长；φ_k 为第 k 步的电势分布。式(5)中的左右端项为同一形式，令 p 代表 $\varepsilon+\dfrac{\Delta t}{2}\gamma$ 或 $\varepsilon-\dfrac{\Delta t}{2}\gamma$，在计算二维轴对称场时式(5)可写作

$$\nabla\cdot p\nabla u\Leftrightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(p\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{\partial}{\partial z}(p\frac{\partial u}{\partial z})\tag{6}$$

式中：u 为待求函数；ρ 为二维轴对称场中的横坐标；z 为二维轴对称场中的纵坐标；p 代表对式(6)乘上权函数后在整个域内做积分，可得

$$\iint_{\Omega}w(-\nabla\cdot p\nabla u)\mathrm{d}s=\iint_{\Omega}p\rho(\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z})\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z-\oint_{\Gamma}wp\nabla u\boldsymbol{m}\mathrm{d}l\tag{7}$$

式中：Ω 为积分区域；Γ 为积分区域边界；w 为加权函数；s 为面积；l 为长度；$\boldsymbol{m}$ 为待求单元表面的单位法向向量。式(7)中右端的后半部分在整个场域(除边界外)中互相抵消，选取合适的形函数作为权函数与电位函数的插值函数，将式(5)作为有限元控制方程，可得

$$(\boldsymbol{K}_{\varepsilon}+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{K}_{\gamma})\boldsymbol{\Psi}_{k+1}=(\boldsymbol{K}_{\varepsilon}-\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{K}_{\gamma})\boldsymbol{\Psi}_k\tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{K}_{\varepsilon}$、$\boldsymbol{K}_{\gamma}$ 分别为介电常数和电导率的刚度矩阵；$\boldsymbol{\Psi}_k$ 为第 k 个时间点上的电位列向量。

将每个单元的介电常数和电导率刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{e\varepsilon}$、$\boldsymbol{K}_{e\gamma}$ 计算后叠加到整体刚度矩阵中，得到原偏微分方程的离散格式。由于模型复杂，刚度矩阵阶数较大且为大型稀疏矩阵，故采用稀疏矩阵压缩存储。

1.2 悬浮电位边界条件加载与稀疏矩阵优化

套管环氧芯体中有多组用于均衡电场的金属极板，要在这些极板上附加悬浮电位条件。王栋介绍了多种处理悬浮电位边界条件的方法，最终采用了强加虚拟齐次边界条件[23]。崔翔基于有限元方法，提出了计算含有电位悬浮导体电场分布的最小能量法和部分电容法，对电荷守恒法进行研究[24]。韩社教采用强加虚拟齐次边界条件法计算了氧化锌避雷器电位的分布，闫照文采用模拟电荷−小波法计算了含有悬浮电位的静电场问题[25-26]。

由于强加虚拟齐次边界条件法对于原矩阵的修改便于操作、易于处理，本文采用强加虚拟齐次边界条件法设置金属悬浮电位。

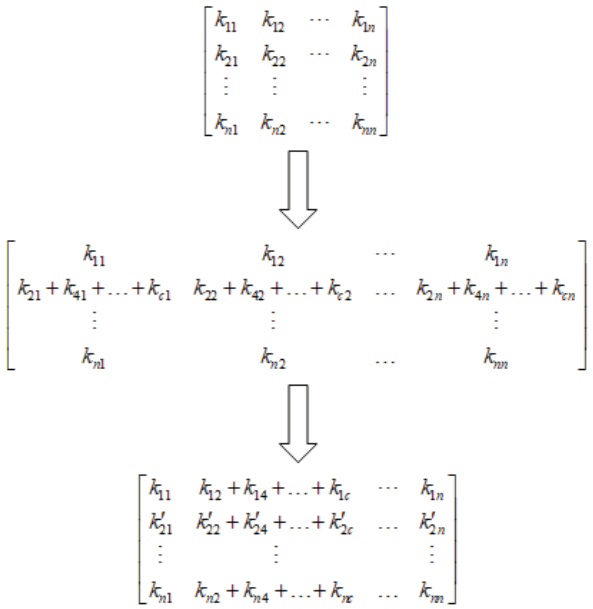
假设某一悬浮电位组为编号 2、4、5、6、7、9、…、c，则对这一组悬浮电位的处理流程如图 1 所示。

首先选择 2 号节点为该组的代表节点，将 4、5、6、7、9、…、c 行的数据加到第 2 行对应的位置，并将 4、5、6、7、9、…、c 行的数据全部置 0。然后将 4、5、6、7、9、…、c 列的数据加到第 2 列对应的位置，并将 4、5、6、7、9、…、c 列的数据全部置 0。最后，将 4、5、6、7、9、…、c 行对角线的位置置 1。待计算完成后，将 2 号节点的数值赋给其他该悬浮电位组上的节点。

上述处理悬浮电位的方法涉及到矩阵元素整行整列的修改，在矩阵阶数大、悬浮电位处网格密集(悬浮电位节点较多)时计算效率非常低下，且悬浮电位除代表节点外的其他节点，已经与结果求解没有关系，仍然占据矩阵一行一列，使得矩阵维数增大。

有限元刚度矩阵本身为稀疏矩阵，因此结合稀疏矩阵特性，对悬浮电位条件的设置进行优化。在生成有限元刚度矩阵时，将悬浮电位条件插入，最终直接生成一个插入悬浮电位条件后的矩阵，优化后芯体极板悬浮电位条件设置流程如图 2 所示，具体方法如下。

仍以上文的悬浮电位组为例说明，先建立 1 个 NewNode 数组，用来记录悬浮电位设置情况(用于计算完成后还原其他节点的值)。再建立 1 个 sub 数组，用于记录在当前节点已经删除了几个节点，保证删除后节点编号的连续性。sub 数组采用遍历 NewNode 数组的方式生成数值。在计算有限元刚度矩阵时，将原来的节点编号替代为 NewNode(i)–sub(NewNode(i))，可以一次将系数矩阵生成完毕，避免因悬浮电位产生矩阵的多余行列加法与删除行列运算。以 2、4、5、6、7、9、…、c 为例，如图 2 所示，4、5、6、7、9、…、c 的数值在计算时自动加到了 2 号节点的位置，而 8 号节点在计算时数值自动填放在第 8−4=4 行和第 4 列，自动完成了前面 4 个节点的删除，避免了耗时的矩阵计算。



n—电场刚度矩阵的阶数；k_{ij}—初始电场矩阵第 i 行和第 j 列元素；k'_{ij}—悬浮电位节点所在行元素相加后的矩阵第 i 行和第 j 列元素

图 1　悬浮电位条件矩阵设置方法示意图

Fig.1　Schematic diagram of suspension potential condition matrix setting method

1.3　边界条件插入

有限元边界条件分为 3 类，分别为 Dirichlet 边界(式(9))、Neumann 边界条件(式(10))和混合边界条件(式(11))，3 种条件的数学表达式为：

$$u = u_0 \tag{9}$$

$$p\nabla u \cdot \boldsymbol{m} = \beta \tag{10}$$

$$p\nabla u \cdot \boldsymbol{m} + \alpha u = \beta \tag{11}$$

式中：u_0 为初始电压；α 为一次项系数；β 为方程右端项在本文中边界条件仅涉及第一类边界条件，即在边界上指定电位值。故式(7)中右端的第 2 项为 0。第一类边界条件加载时，即线性方程组中某些电位变量变为已知值，将该节点的电位值设置为给定电位值，同时将矩阵中相应的边界上的节点电位对应的对角元素设为一个大数，本文中设定为 10^6，这样第 i 个方程除已知值的节点电位以外的其他电位未知量的系数与 10^6 相比微不足道，此时计算结果的误差是可以忽略不计的，最后解出的电位势必与给定电位值近似相等。

2　POD 模型降阶方法

本征正交分解法(proper orthogonal decomposition，POD)主要是通过计算数据矩阵的协方差矩阵，然后得到协方差矩阵的特征值和特征向量，取出最大的 k 个特征值所对应的特征向量，构成一个新的矩阵，把样本矩阵投影到以该矩阵为基的新空间中，这样就可以实现数据特征的降维。由于得到协方差矩阵的特征值、特征向量有 2 种方法：特征值分解协方差矩阵、奇异值分解协方差矩阵，所以 POD 算法有 2 种实现方法：基于特征值分解协方差矩阵实现 POD 算法和基于奇异值分解(singular value decomposition，SVD)协方差矩阵实现 POD 算法。

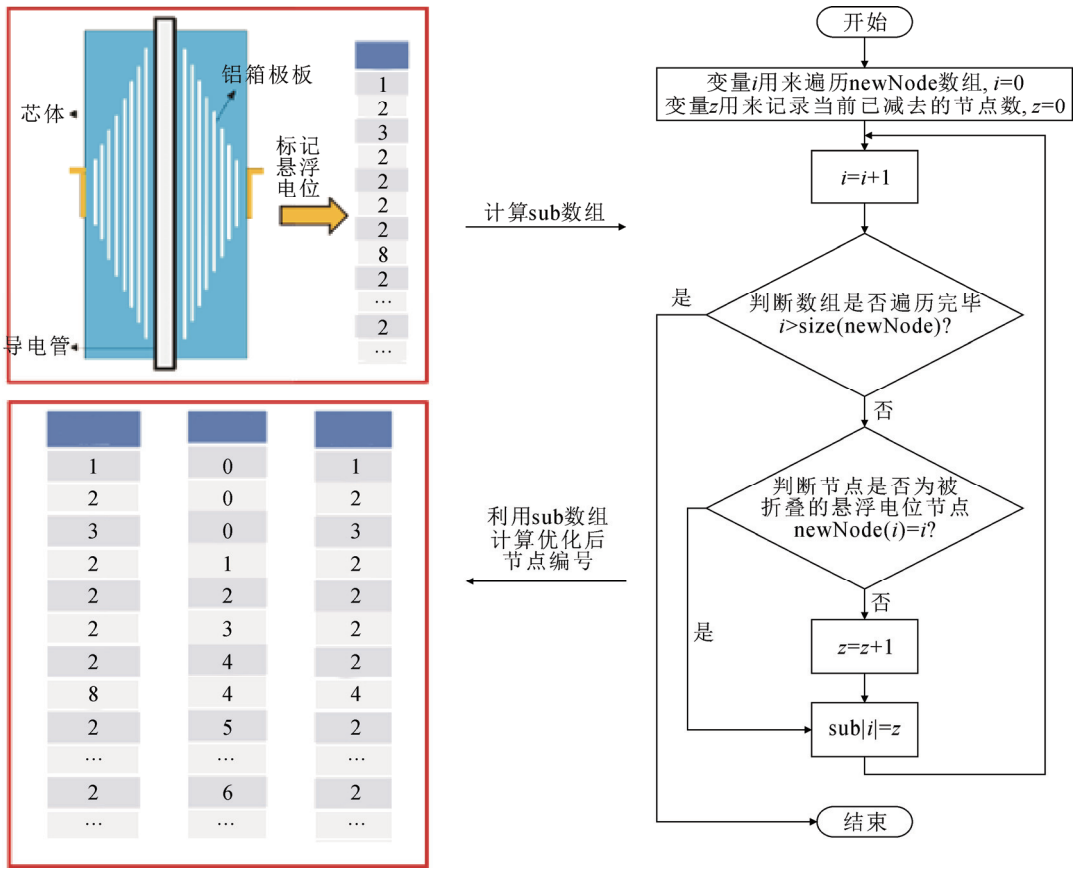


图 2 优化后悬浮电位条件设置流程图

Fig.2 Flow chart of revised suspension potential setting method

本文采用基于奇异值分解方法实现套管电场矩阵的主成分分析。

在直流暂态电场的迭代计算中，先求取前 m 个时间步的电势，并组成矩阵 $\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{\Psi}_1,\ \boldsymbol{\Psi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\Psi}_m]$，矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 中的列向量 $\boldsymbol{\Psi}_i$ 为第 $i\Delta t$ 时刻场域 n 个节点电位组成的向量$[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n]^{\mathrm{T}}$，此时不同时刻节点电位样本矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 张成空间的一组标准正交基为$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_m]$，即实物模型中某个时刻空间节点电位组成的列向量可表示为

$$\boldsymbol{\Psi}_i=\sum_{j=1}^{m} x_j\boldsymbol{\zeta}_j \tag{12}$$

式中 x_j 为电位 $\boldsymbol{\Psi}_i$ 在投影子空间中的坐标。POD 模型降阶方法就是求一组维数小于 m 的 d 维标准正交基$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_d]$，使得用低维正交基映射得到的数据接近真实列向量 $\boldsymbol{\Psi}_i$ 的数值，经推导转化为数学语言，即对 $\boldsymbol{Y}$ 进行奇异值分解，求矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的左奇异向量 $\boldsymbol{U}$，表示为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}_\sigma\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{U}$ 为 $n\times n$ 阶矩阵；$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ 为 $m\times m$ 阶矩阵；$\boldsymbol{\Sigma}_\sigma$ 为 $n\times m$ 阶对角矩阵 $\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m, 0, 0, \cdots, 0)$，其非零元素为矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的奇异值矩阵。通过奇异值分解得到的矩阵 $\boldsymbol{U}$ 列向量 $\boldsymbol{u}_i$ 即是 n 维空间特征向量 $\boldsymbol{\xi}_i$，矩阵 $\boldsymbol{U}$ 中对应奇异值 σ_i 最大的前 $d(d<<m)$ 个列向量即为最优的 d 维标准正交基$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_d]$。奇异值矩阵第 i 个主成分的贡献率可由式(14)算得，其中 n 为奇异值的个数。

$$a_i=\frac{\sigma_i}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i} \tag{14}$$

奇异值越大，包含的信息就越多。在奇异值分解中，奇异值通常按照从大到小的顺序排列，而且减小得非常快。通常前 10%的奇异值就占据了全部奇异值 99%以上的比例，所以可以用少量主成分来重构原向量，大大减少了计算量。选取其中前 d 个奇异值所对应的主成分作为简化后的电势的正交基向量，得到 $n\times d$ 维投影矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_d]$，使用 POD 正交基重构场域中的节点电位得到

$$\boldsymbol{\Psi}_i=\sum_{j=1}^{d} f_j\boldsymbol{\xi}_j=\boldsymbol{P}\boldsymbol{f} \tag{15}$$

式中：向量 $\boldsymbol{f}=[f_1, f_2, \cdots, f_d]^{\mathrm{T}}$；$f_j$ 代表电位矩阵在 d 维投影子空间中的坐标。将式(15)代入式(8)变换成如下迭代形式。

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{f}_{k+1}=\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{f}_k \\ \boldsymbol{K}_{k+1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{K}_\varepsilon+\dfrac{\Delta t}{2}\boldsymbol{K}_\gamma\right)\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{K}_\varepsilon-\dfrac{\Delta t}{2}\boldsymbol{K}_\gamma\right)\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{f}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi} \end{cases} \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{K}_k$ 为第 k 个时间点的迭代矩阵；$\boldsymbol{f}_k$ 为向量 f 在第 k 个时间点的结果。在新的迭代格式中，求解电场的迭代矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的阶数由全阶 n 变为了 d 阶，d 远小于 n，因此通过数学处理后，大大提高了电场有限元方程的求解运算速度。

3　换流变阀侧套管暂态电场降阶计算

本章以具体的实际套管模型为例说明轻量化模型的构建过程，实现±400 kV 换流变阀侧套管在极性反转电压下电场的快速计算。本文求解部分采用 matlab 程序编写，设备处理器为 i9-10900K，主频为 3.7 GHz。内存为 128 G，windows10 操作系统，matlab 版本为 R2016a。

3.1　换流变阀侧套管计算模型

如图 3 所示为±400 kV 换流变阀侧套管的二维轴对称计算模型，主要包括环氧浸纸芯体、SF_6 气体、护套和尾部出线装置等结构，其内部载流导体与屏蔽罩接高压，油箱、外部空气边界、接地法兰以及芯体最外层极板均接地，内层极板设置悬浮电位组。

网格采用三角形网格划分，共有 645 280 个三角形单元，322 991 个结点。套管高压导体加载极性反转电压，极性反转电压为−549 kV(120 min)/+549 kV (120 min)，极性反转过程在 2 min 内完成，波形如图 4 所示。极性反转过程中的电场分布是电容电场分布和电阻电场分布的叠加，设置计算步长为 $\Delta t=10$ s，迭代过程为 1458 步。

3.2　换流变阀侧套管暂态电场 POD 降阶计算方法

应用 POD 降阶方法，对±400 kV 换流变阀侧套管电场刚度矩阵进行降阶处理，取前 30 个时间步的迭代结果进行奇异值分解，得到奇异值降序排列的矩阵 $\boldsymbol{U}$，选取对应特征值较大的列向量，其组成的空间即为降维后空间组成的投影矩阵 $\boldsymbol{P}$，对原模型的计算矩阵按照式(15)处理后，可得到降阶的模型矩阵。迭代 1458 步后发现结果不收敛，以 158 200 号节点为例，前 5 步迭代结果如表 1 所示。

可以看出从第 1 步迭代开始，数据出现较大误差，说明降阶结果不收敛。这是由于 POD 作为一种无监督学习算法，本身并不一定能计算出最优的主成分。例如在本文套管模型直流电场的暂态过程计算中，其本质是一个电容充电过程，其规律满足

$$\varphi(t)=\varphi(\infty)+\left(\varphi(t)-\varphi(\infty)\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{17}$$

式中：$\varphi(t)$为 t 时刻的电位；$\varphi(\infty)$为稳定时的电位；τ 代表材料的时间常数。而在本算例中，由于各材料间介电常数之比与电导率之比相差不大，导致电压加压初始时刻电场分布与稳态电场分布相似，各时间步的数据中终值占很大成分。大占比的终值数据(噪声)淹没了重要的暂态过程的数据(信息)，导致了主成分提取的失败。

基于此，先对数据进行处理，去除数据之间的共性，保留数据之间的个性。考虑到电容充电的电

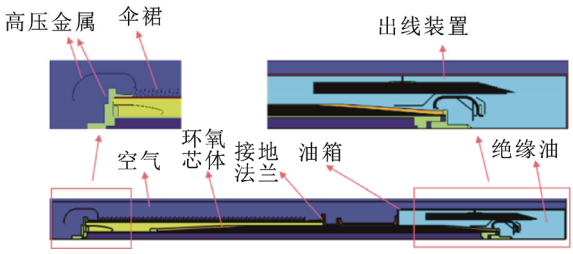


图 3　套管计算模型结构示意图

Fig.3　Structural diagram of the bushing calculation model

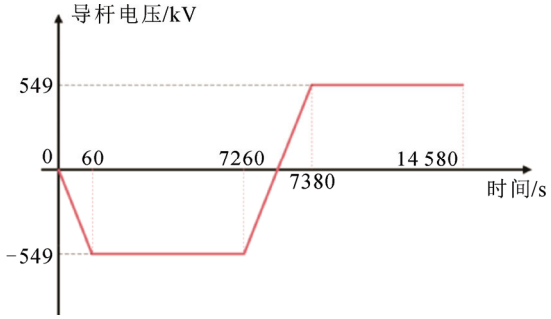


图 4　极性反转电压波形

Fig.4　PR test voltage waveform

表 1　158 200 号节点前 5 步电位降阶结果与真实电位结果对比

Table 1　Comparison of the first five steps of order reduction results with the real results of potential at node 158 200

迭代步数	1	2	3	4	5
真实结果/10^5 V	−0.159	−0.315	−0.469	−0.622	−0.772
降阶结果/10^5 V	−0.140	−0.280	−0.420	−0.560	−0.700

场分布特性，将电位分布分为两部分：稳态分量和暂态分量。将前 30 个节点的电位值减去稳态分量的部分，得到各时刻暂态分量。该暂态分量所代表的物理意义为：在直流电场作用下界面之间积累的电荷量对电场造成的影响。这个由积累电荷造成的电场是每一步迭代中改变的量，因此将式(15)中的迭代变量改为如下变量，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}_0 \\ \boldsymbol{f}' = \boldsymbol{P}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Psi}' \end{cases} \tag{18}$$

式中：$\boldsymbol{\Psi}'$ 为改进后的电位矩阵；$\boldsymbol{\Psi}$ 为改进前的电位矩阵；$\boldsymbol{\psi}_0$ 为电压 549 kV 下的直流场稳态电位矩阵；$\boldsymbol{f}'$ 为电位矩阵 $\boldsymbol{\Psi}'$ 在投影子空间中的坐标；$\boldsymbol{P}'$ 为基于处理后的电位矩阵 $\boldsymbol{\Psi}'$ 求得的投影矩阵。此时的迭代格式也需要做相应的改进，即

$$\boldsymbol{K}'_{k+1}\boldsymbol{f}'_{k+1} = \boldsymbol{K}'_k\boldsymbol{f}'_k + a\boldsymbol{K}'_{k+1}\boldsymbol{f}'_0 \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{K}'_k$ 为第 k 个时间步改进后的迭代矩阵；$\boldsymbol{f}'_k$ 为第 k 个时间步电位矩阵 $\boldsymbol{\Psi}'$ 在投影子空间中的坐标；$\boldsymbol{f}'_0$ 为无电荷积累时迭代一步产生的电荷对电位的影响量；a 为缩放系数。式中迭代矩阵仍然通过式(15)中的方法求得，但投影矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的样本矩阵由初识的 $\boldsymbol{Y}$ 矩阵改为式(18)中的 $\boldsymbol{\Psi}'$ 组成的样本矩阵。式(19)的物理含义为：每一时间步积累的新电荷由稳态分量和暂态分量共同组成，其中稳态分量经过一个时间步积累的值是固定的，与暂态分量目前的积累量叠加算出下一时间步积累的电荷量。

采用上述电场降阶改进计算方法，选取前 4 个主成分组成投影矩阵并迭代计算 1458 步，计算得到了套管在极性反转过程中的暂态电场降阶计算模型，表 2 给出了算法优化后 158 200 号节点前 5 步电位降阶结果与真实电位的对比结果，从表 2 中可以看出，电场矩阵改进后降阶计算结果与全阶计算结果误差较小，证明本文得到的数字孪生模型可用于高压套管暂态电场的快速计算和性能实时评估。

4 换流变阀侧套管套管暂态电场降阶结果

采用 3.2 节所述的电场刚度矩阵的降阶处理方法，通过奇异值分解，获得了套管暂态电场刚度矩阵的主成分分量，根据式(14)计算主成分贡献率，结果如图 5 所示。可以看出仅第 1 个主成分的贡献率就已经>0.9933，前 2 个主成分的累积贡献率已经达到 0.999 以上，这不但验证了在上述套管模型中应用 POD 方法的合理性，也说明第 1 个主成分就可以涵盖大部分的信息，因此采用 1—3 阶降阶方法就可以较为精确地得到套管模型的电势分布，同时很大程度上减少了计算时间，节约了计算资源。

同时采用有限元软件和本文所述降阶方法对 ±400 kV 换流变阀侧套管模型进行电场仿真，得到了其整体电位分布如图 6 所示。图 6 左侧为全阶有

表 2 算法优化后 158 200 号节点前 5 步电位降阶结果与真实电位对比

Table 2 Comparison of the first five steps of order reduction results with the real results of potential at node 158 200 after algorithm optimization

迭代步数	1	2	3	4	5
真实结果/(10^5 V)	–0.159	–0.315	–0.469	–0.622	–0.772
降阶结果/(10^5 V)	–0.159	–0.315	–0.471	–0.624	–0.776

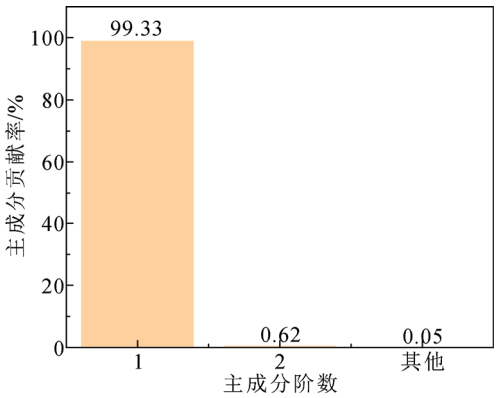


图 5 主成分贡献率

Fig.5 Contribution rate of principal component

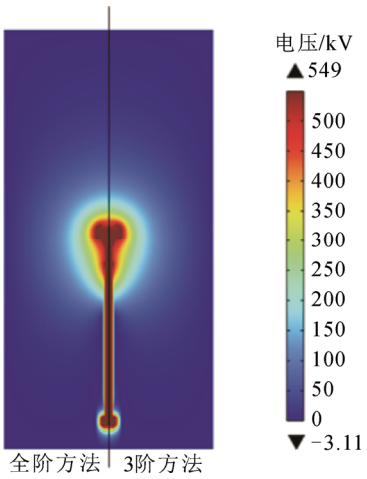


图 6 全阶方法(左半)与 3 阶方法(右半)计算得到的套管整体电位分布

Fig.6 Voltage distribution of the bushing using the traditional method (left) and three-order method (right)

限元计算方法得到的结果，右侧为降阶模型得到的结果，2 种方法的结果较为接近，说明本文方法总体上具有较高的准确度。

为了进一步优化电场降阶计算方法，在降低矩阵阶数的同时保证套管电场分布的计算精度，需要研究电场矩阵阶数对套管关键部位电场分布的影响。电容芯子的极板电场分布是套管设计、校核环节的重点考察指标。因此计算了不同阶数下的电容芯子径向极板电场分布，结果如图 7 所示。

可以看出，在不同的时刻，随着阶数的增加，相对误差呈现明显下降的趋势。当阶数达到 3 阶时，其计算结果与全阶计算结果基本相符，60 s 时最大相对误差为 0.001%，7260 s 时最大相对误差为 0.95%，7380 s 时最大相对误差为 0.92%，14 580 s 时最大相对误差为 0.39%，图 8 反映了零层极板处的径向场强随极性反转加压时间变化的关系曲线，为了避免数据点过多造成拥挤，在作图时每隔 300 s 取 1 次数据记录结果。各阶计算结果的相对误差如图 9 所示，其中 1 阶结果最大误差为 1.2%，2 阶结果最大误差为 0.97%，3 阶结果最大误差为 0.93%，证明本文的降阶方法具有足够的精确度。

换流变阀侧套管尾部均压球表面电场较为集中，易引发油中局部放电，对计算的精确度要求较高。图 10 显示了传统有限元方法与 1—3 阶 POD 降阶方法在尾部均压球附近的电位分布云图，可以看出 3 阶方法得到的电位分布与传统方法得到的结果基本一致，说明 3 阶方法可以较准确地反映出尾部均压球附近的电位特征，进而证明了 3 阶方法具有较高的精确度。因此针对本文的套管模型，采用 3 阶 POD 方法就可以在保证精确度的前提下节约计算资源，缩短计算时间，提高计算效率。

为了获得尾部出线装置关键位置处电场强度随极性反转时间的变化规律，在出线装置及尾部均压球附近分别截取了 1 条径向路径及第 1 层油隙和油浸纸板内部的 2 个关键点，计算了其场强分布，截取的路径和关键点位置示意图如图 11 所示。在不

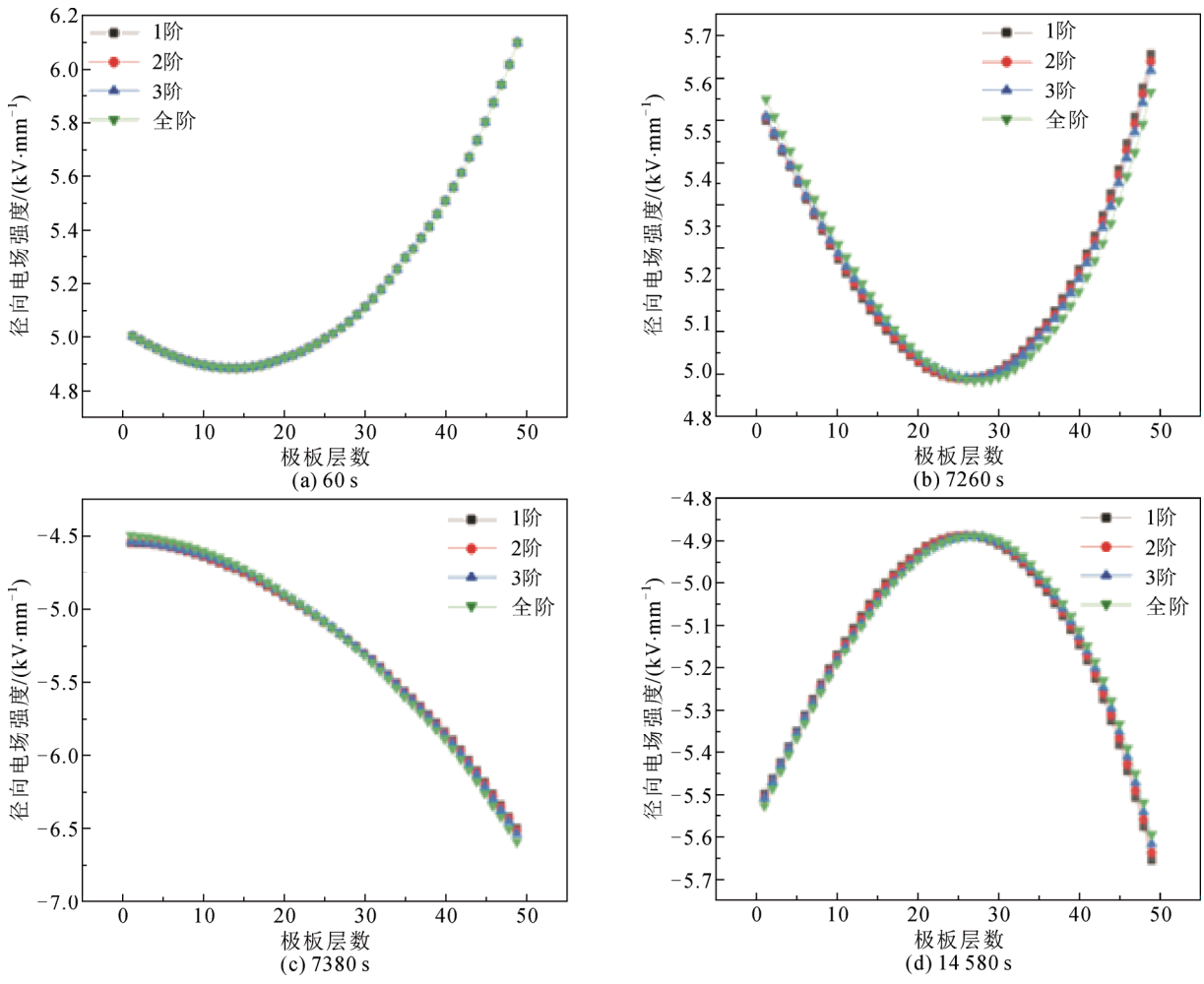


图 7　不同时刻下不同阶方法计算的极板径向电场分布

Fig.7　Radial electric field distribution of the core from different order methods at different moments

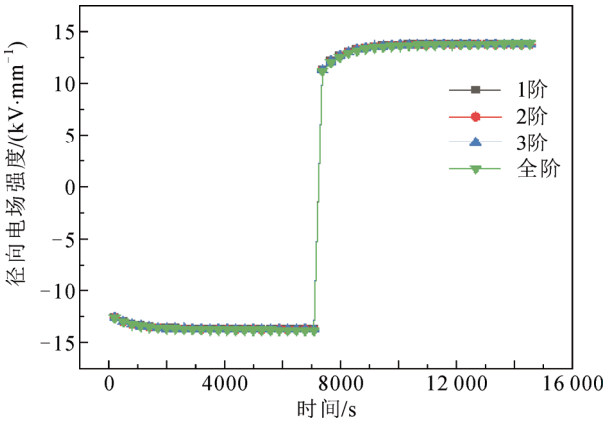


图 8 最内层极板径向场强随时间变化关系曲线

Fig.8 Curve of the radial field strength of the innermost plate varying with time

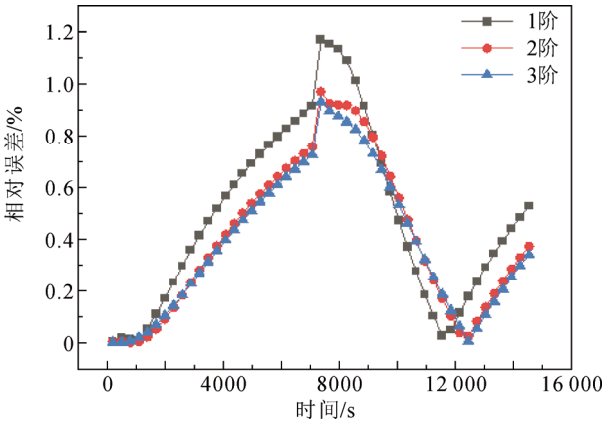


图 9 最内层极板径向场强各阶计算结果相对误差

Fig.9 Relative error of the radial electrical field strength at the innermost plate calculated by different reduced orders

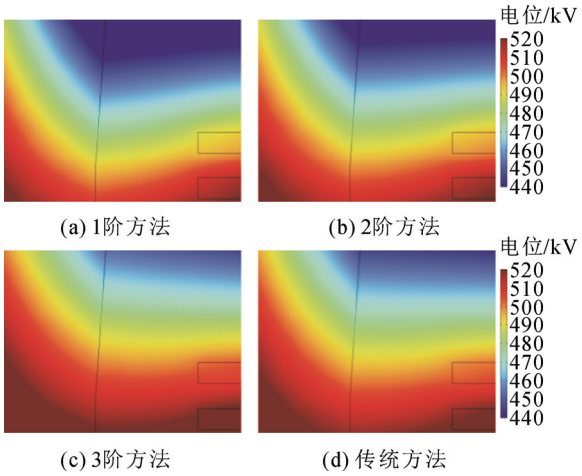


图 10 各阶方法得到的 60 s 时尾部均压球附近电位分布云图

Fig.10 Electrical potential cloud pictures of grading ball calculated by different reduced orders at 60 s

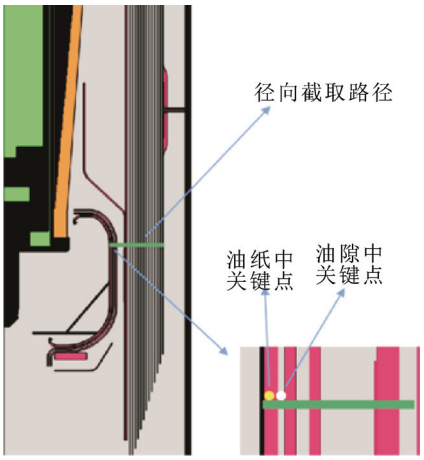
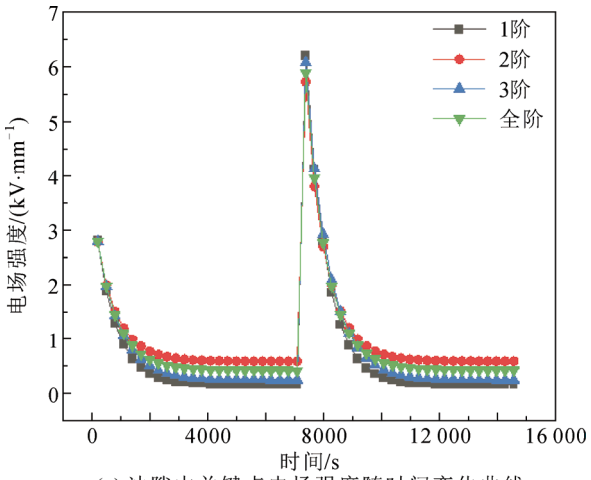
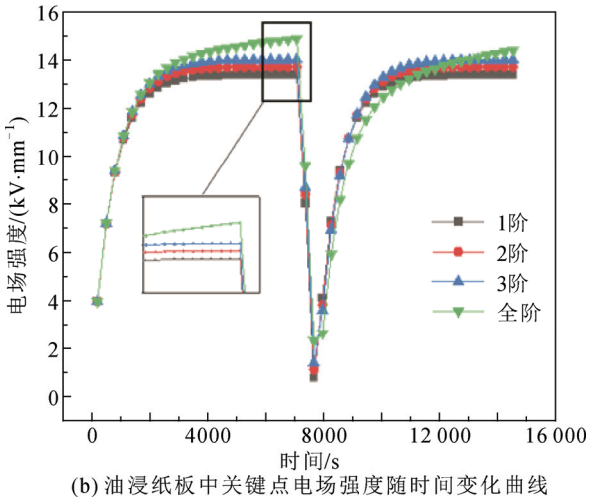


图 11 套管尾部出线装置截取的关键点及截线示意图

Fig.11 Schematic diagram of the intercepted key points and intersection line in the outlet device of the bushing



(a) 油隙中关键点电场强度随时间变化曲线



(b) 油浸纸板中关键点电场强度随时间变化曲线

图 12 油隙和油浸纸板中关键点电场强度随时间变化曲线

Fig.12 Variation curves of the electric field strength at key points inside oil gap and oil/pressboard with time changing

同降阶阶数下油隙、油浸纸板中关键点处电场强度随时间变化曲线如图 12 所示。在作图时每隔 300 s 取 1 次数据记录结果。

由于油的相对介电常数小于油纸的，因此初始

时刻油隙内部的电场大于油浸纸板内部的电场，当电场从 0 s 时的电容分布过渡到电阻分布过程中，由于油的电导率大于油浸纸板的电导率，油隙内部的电场强度逐渐降低，而油浸纸板内部的电场逐步增加。当电压在 7260~7380 s 极性反转过程中，油隙内的电场显著增加，油浸纸板内部的电场显著减小，可见，在承担极性反转电压过程中套管尾部油隙是绝缘系统的薄弱部位，场强集中，易引发局部放电。1—3 阶 POD 方法计算得到的油隙中点电场与全阶方法计算结果基本一致，1、2 阶 POD 方法计算油浸纸板中点电场与全阶方法之间存在一定误差，但 3 阶方法计算结果可以与全阶计算结果较相符。在 t=7380 s 时，极性反转完成，第 1 层油隙中关键点场强达到最大值，此时 1—3 阶 POD 方法计算结果误差分别为 5.3%、2.9%、3.1%。在 t=7260 s 时，极性反转开始，油浸纸板中关键点场强达到最大值，此时 1—3 阶 POD 方法计算结果误差分别为 10.3%、8.0%、5.9%。

图 13 给出了不同降阶阶数下尾部出线装置截线上的径向电场强度分布曲线。可以看出，60 s 和 7260 s 时截线上电场分布趋势基本相同；至 7380 s 完成极性反转后，电场方向反转，至 14 580 s 分布趋势依然维持不变。在不同的时刻，随着阶数的增加，相对误差呈现明显下降的趋势，3 阶计算结果与全阶计算结果基本相符。

在 t=60 s 时，截线上的最大径向场强出现在尾部均压球第 1 层油浸纸板与第 2 层油浸纸板之间的油隙中，此时 1—3 阶 POD 方法计算结果的相对误差分别为 0.31%、0.002%、0.0003%。在 7260 s 极性反转开始时，截线上的最大径向场强出现在尾部均压球第一层油浸纸板中，1—3 阶 POD 方法计算结果的相对误差分别为 10.4%、8.0%、6.0%。在 7380 s 极性反转完成时，局部径向场强方向开始发生反转，截线上的最大径向场强仍出现在尾部均压球第一层油浸纸板中，1—3 阶 POD 方法计算结果的相对误差分别为 16.4%、12.6%、9.5%。在 14 580 s

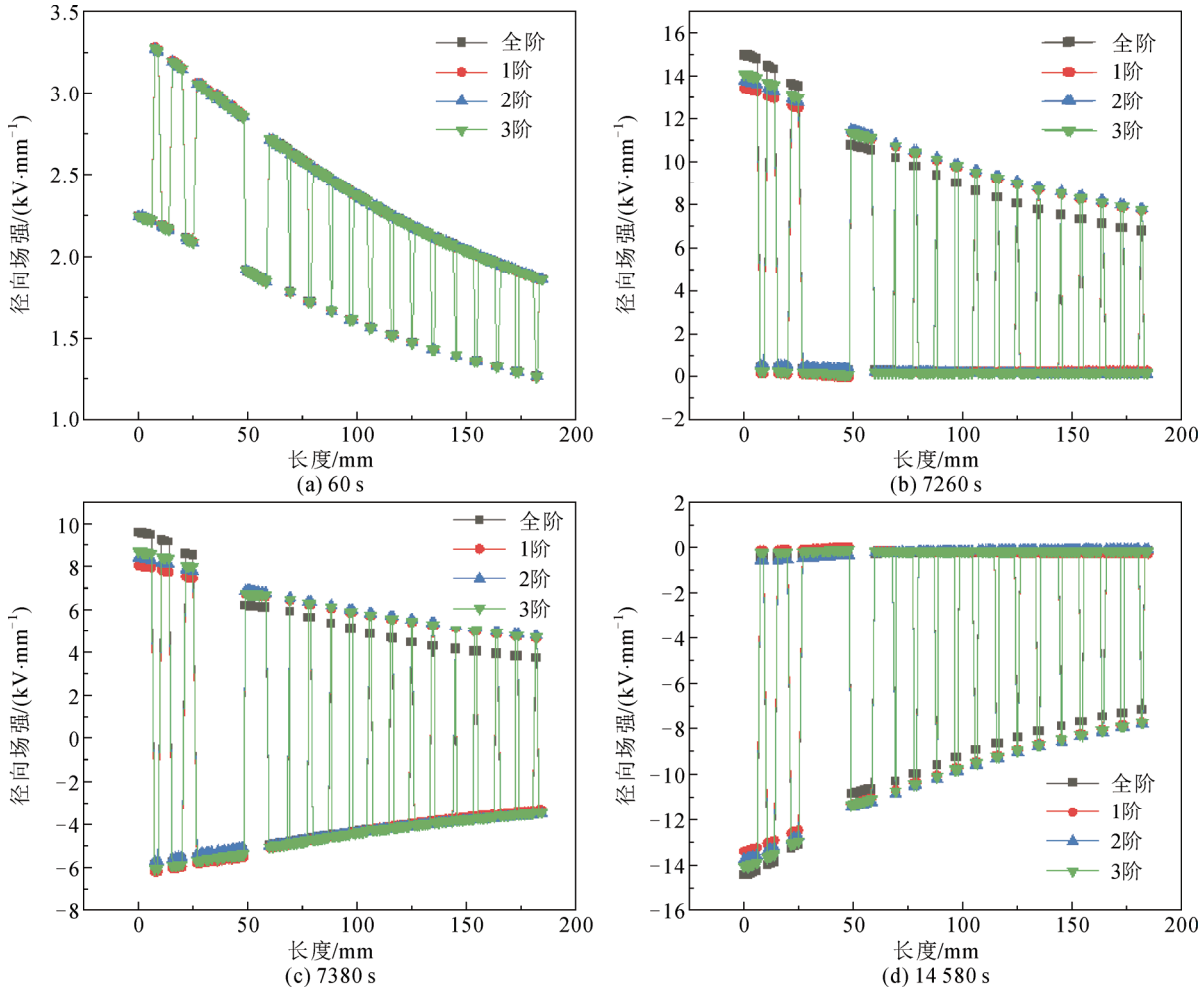


图 13 各阶方法下在不同时刻截线上径向电场强度

Fig.13 Radial electric field distribution curves along the intersection line at key time points under different reduced orders

时，截线上各处电场方向基本彻底完成反转，截线上的最大径向场强还是出现在尾部均压球第 1 层油浸纸板中，1—3 阶 POD 方法计算结果在此处的相对误差分别为 7.2%、4.8%、2.3%。

为进一步验证本文方法的计算效率，对比了 1—3 阶方法以及传统方法的计算时间，结果如表 3 所示。从表 3 中可以看出，传统方法的总计算时间为 99.147 s，约为降阶方法的 10 倍，且随着网格的细化，时间差距会越来越明显。对降阶方法而言，1—3 阶方法进行奇异值分解的时间相同，仅需 0.16 s；迭代计算的时间远大于进行奇异值分解的时间。从总时间来看，随着降阶阶数增大，总计算时间呈现逐渐增大的趋势，但几乎不变。总体上看，相比于传统方法，降阶方法在计算效率上具有较明显的优势。

5 结论

1）本征正交分解方法可以提取电场模型刚度矩阵的主要信息，将所用到的向量映射到主成分特征向量张成的空间中，可以大大降低有限元刚度矩阵的维数，实现降阶效果，从而提高运算速度。

2）针对换流变阀侧套管的暂态电场计算，基于本征正交分解的模型降阶法具有较好的效果，矩阵奇异值分解得到的前 2 个主成分的累积贡献率已经达到 0.999 以上，基本包含模型的全部物理信息。当阶数达到 3 阶时，芯体径向场强在 60、7260、7380 和 14 580 s 时最大相对误差分别为 0.001%、0.95%、0.92%和 0.39%；针对尾部出线装置，在 7260 s 极性反转开始时，最大径向场强出现在尾部均压球第一层油浸纸板中，1—3 阶 POD 方法计算结果的相对误差分别为 10.4%、8.0%、6.0%；在 7380 s 极性反转完成时，最大径向场强仍出现在尾部均压球第一层油浸纸板中，1—3 阶 POD 方法计算结果的相对误差分别为 16.4%、12.6%、9.5%。

3）POD 降阶方法在保证精度的基础上具有较高的计算效率，可以节约计算资源，大幅减少计算时间。针对±400 kV 换流变阀侧套管模型，采用 1—3 阶模型降阶方法的计算时间约为传统方法的 1/10，采用 3 阶降阶方法，套管各关键部位电场的计算误差<10%。综合来看，本文提出的轻量模型数值计算方法对于多节点复杂套管模型的暂态电场计算具有高精度、高效率的优势，对数字孪生在套管电力设备多物理场仿真领域的应用提供了支撑。

表 3 降阶方法与传统方法的计算时间对比

Table 3 Computation time comparsion between reduced order method and traditional method

方法	自由度	奇异值分解时间/s	迭代时间/s	总时间/s
1 阶	1	0.16	9.94	10.1
2 阶	2	0.16	9.98	10.14
3 阶	3	0.16	10.21	10.37
传统方法	195 797	0.00	99.15	99.15

参考文献 References

[1] 刘云鹏，刘一瑾，律方成，等. 数字孪生技术在输变电设备中的应用前景与关键技术[J]. 高电压技术，2022，48(5)：1621-1633.
LIU Yunpeng, LIU Yijin, LÜ Fangcheng, et al. Application prospect and key technology of digital twin in power transmission and transformation equipment[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(5): 1621-1633.

[2] 刘亚东，陈 思，丛子涵，等. 电力装备行业数字孪生关键技术与应用展望[J]. 高电压技术，2021，47(5)：1539-1554.
LIU Yadong, CHEN Si, CONG Zihan, et al. Key technology and application prospect of digital twin in power equipment industry[J]. High Voltage Engineering, 2021, 47(5): 1539-1554.

[3] ALAM K M, SADDIK A E. C2PS: a digital twin architecture reference model for the cloud-based cyber-physical systems[J]. IEEE Access, 2017, 5: 2050-2062.

[4] LEE J, AZAMFAR M, SINGH J, et al. Integration of digital twin and deep learning in cyber-physical systems: towards smart manufacturing[J]. IET Collaborative Intelligent Manufacturing, 2020, 2(1): 34-36.

[5] 杨 帆，吴 涛，廖瑞金，等. 数字孪生在电力装备领域中的应用与实现方法[J]. 高电压技术，2021，47(5)：1505-1521.
YANG Fan, WU Tao, LIAO Ruijin, et al. Application and implementation method of digital twin in electric equipment[J]. High Voltage Engineering, 2021, 47(5): 1505-1521.

[6] HESTHAVEN J S, ROZZA G, STAMM B. Certified reduced basis methods for parametrized partial differential equations[M]. Cham: Springer, 2016.

[7] 刘 刚，荣世昌，武卫革，等. 基于混合有限元法和降阶技术的油浸式变压器绕组 2 维瞬态流–热耦合场分析[J]. 高电压技术，2022，48(5)：1695-1704.
LIU Gang, RONG Shichang, WU Weige, et al. Two-dimensional transient flow-thermal coupling field analysis of oil-immersed transformer windings based on hybrid finite element method and reduced-order technology[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(5): 1695-1704.

[8] MILANI R, QUARTERONI A, ROZZA G. Reduced basis method for linear elasticity problems with many parameters[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(51/52): 4812-4829.

[9] LIU G R, LEE J H, PATERA A T, et al. Inverse identification of thermal parameters using reduced-basis method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(27/28/29): 3090-3107.

[10] SHI Y T, CHEN X G, TAN Y Y, et al. Reduced-basis boundary element method for fast electromagnetic field computation[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2017, 34(12): 2231-2242.

[11] MOORE B. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction[J]. IEEE Transactions on

Automatic Control, 1981, 26(1): 17-32.

[12] PIERQUIN A, HENNERON T, CLÉNET S, et al. Model-order reduction of magnetoquasi-static problems based on POD and arnoldi-based Krylov methods[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(3): 7206204.

[13] 李　鹏，于　浩，王成山，等. 基于 Krylov 子空间的大规模配电网络模型整体化简方法[J]. 电网技术，2013，37(8)：2343-2348.
LI Peng, YU Hao, WANG Chengshan, et al. Model order reduction of large scale distribution grid based on Krylov subspace method[J]. Power System Technology, 2013, 37(8): 2343-2348.

[14] 谷　宇，殷长春，邱长凯，等. 基于有理 Krylov 子空间法的可控源海洋电磁三维各向异性正演研究[J]. 地球物理学进展，2020，35(6)：2332-2350.
GU Yu, YIN Changchun, QIU Changkai, et al. Three-dimensional anisotropic forward modeling for marine CSEM method in time-domain based on rational Krylov subspace method[J]. Progress in Geophysics, 2020, 35(6): 2332-2350.

[15] BÖRNER R U, ERNST O G, GÜTTEL S. Three-dimensional transient electromagnetic modelling using rational Krylov methods[J]. Geophysical Journal International, 2015, 202(3): 2025-2043.

[16] SUMANT P, WU H, CANGELLARIS A, et al. Reduced-order models of finite element approximations of electromagnetic devices exhibiting statistical variability[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(1): 301-309.

[17] SCHMIDTHAUSLER D, CLEMENS M. Low-order electroquasistatic field simulations based on proper orthogonal decomposition[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2012, 48(2): 567-570.

[18] HENNERON T, CLÉNET S. Model order reduction of non-linear magnetostatic problems based on POD and DEI methods[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2014, 50(2): 33-36.

[19] WANG Z, AKHTAR I, BORGGAARD J, et al. Proper orthogonal decomposition closure models for turbulent flows: a numerical comparison[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 237/240: 10-26.

[20] 羊　静. 基于 POD 降阶外推连续时空有限元方法及飞机碰撞快速模拟研究[D]. 北京：华北电力大学，2021.
YANG Jing. Reduced-order extrapolated continuous space-time finite element method and fast airplane crash simulation based on POD[D]. Beijing, China: North China Electric Power University, 2021.

[21] THOMAS J P, DOWELL E H, HALL K C. Three-dimensional transonic aeroelasticity using proper orthogonal decomposition-based reduced-order models[J]. Journal of Aircraft, 2003, 40(3): 544-551.

[22] 何　江，符　松. 竖直平板间自然对流大尺度相干结构的 POD 分析[J]. 力学学报，2003，35(4)：385-392.
HE Jiang, FU Song. POD analysis of large-scale coherent structures in natural convection between two vertical plates[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(4): 385-392.

[23] 王　栋，阮江军，杜志叶，等. 并行求解含有电位悬浮导体的静电场数值问题[J]. 中国电机工程学报，2011，31(6)：131-136.
WANG Dong, RUAN Jiangjun, DU Zhiye, et al. Parallel numerical computing of electrostatic field model of conductors with floating potentials[J]. Proceedings of the CSEE, 2011, 31(6): 131-136.

[24] 崔　翔. 应用有限元方法计算含有电位悬浮导体的电场分布[J]. 华北电力学院学报，1995，22(2)：1-7.
CUI Xiang. Calculation of electric field for a system with floating electrodes by finite element technique[J]. Journal of North China Inst. of Electric Power, 1995, 22(2): 1-7.

[25] 韩社教，戴　栋，马西奎，等. 应用有限元法计算氧化锌避雷器电位分布[J]. 中国电机工程学报，2001，21(12)：105-108，114.
HAN Shejiao, DAI Dong, MA Xikui, et al. Calculation of potential distribution for zinc-oxide surge arrester by finite element method[J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(12): 105-108, 114.

[26] 闫照文，黄　伟，盛剑霓. 用模拟电荷–小波法计算含有电位悬浮导体的电场分布[J]. 西安交通大学学报，2000，34(2)：16-19.
YAN Zhaowen, HUANG Wei, SHENG Jianni. Electrostatic boundary-value problem for system with unknown potential electrodes using simulation electric charge-wavelet method[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2000, 34(2): 16-19.



王青于(通信作者)
1991—，女，博士，助理教授
主要从事超/特高压交、直流套管绝缘结构优化设计及多物理场数值计算方法等方面的研究工作
E-mail: wqy.1991624@xjtu.edu.cn

WANG Qingyu
Ph.D.
Corresponding author

收稿日期　2022-02-10　修回日期　2023-04-13　　编辑　曾文君