第 49 卷 第 6 期：2408-2419 高电压技术 Vol.49, No.6: 2408-2419
2023 年 6 月 30 日 High Voltage Engineering June 30, 2023
DOI: 10.13336/j.1003-6520.hve.20220689

面向数字孪生应用的变压器温度场有限元降阶建模方法研究

荆澜涛[1]，董雪情[1]，杨 超[2]，范 维[3]，李 桐[3]，王 亮[1]
（1. 沈阳工程学院电力学院，沈阳 110000；2. 国网辽宁省电力有限公司，沈阳 110000；
3. 国网辽宁省电力有限公司电力科学研究院，沈阳 110000）

摘 要：针对油浸式变压器瞬态流固耦合温度场求解存在模型自由度高导致耗时长达小时级的缺陷，构建了变压器数字孪生降阶模型，基于该模型可快速求解瞬态温度场。首先建立基于物联网(internet of things，IoT)的变压器数字孪生实现架构，搭建瞬态流固耦合温度场伽辽金有限元全阶模型。其次，提出将本征正交分解(proper orthogonal decomposition，POD)与有限元结合建立瞬态温度场降阶模型，并结合实测数据给出数字孪生建模与降阶计算流程。最后，开展实际变压器温升试验确保全阶模型准确性，并应用不同阶数降阶模型快速计算温度场分布，比较各阶模型的计算误差与时间。结果表明：计算值与实测值的温升误差绝对值满足在 1.5 ℃以内；3 阶模型计算结果与全阶模型结果符合 POD 误差规范要求；降阶模型与全阶模型相比其计算时间由小时级降至秒级。研究结果验证了降阶模型的准确性与时效性，可以在保证数字孪生模型求解精度的同时最大限度提高求解效率。
关键词：数字孪生模型；变压器温度场；瞬态流固耦合；降阶模型；本征正交分解

Research on Finite Element Reduced Order Modeling Method of Transformer Temperature Field for Digital Twin Application

JING Lantao[1], DONG Xueqing[1], YANG Chao[2], FAN Wei[3], LI Tong[3], WANG Liang[1]
(1. School of Electric Power, Shenyang Institute of Engineering, Shenyang 110000, China;
2. State Grid Liaoning Electric Power Co., Ltd., Shenyang 110000, China;
3. Electric Power Research Institute of State Grid Liaoning Electric Power Co., Ltd., Shenyang 110000, China)

Abstract: In order to solve the transient fluid solid coupling temperature field of oil immersed transformer, the digital twin reduced order model of transformer is constructed, which can quickly solve the transient temperature field. Firstly, the digital twin implementation architecture of transformer based on internet of things (IoT) is established, and the full order Galerkin finite element model of transient fluid solid coupling temperature field is built. Secondly, a reduced order model of transient temperature field is established by combining proper orthogonal decomposition (POD) with finite element method, and the digital twin modeling and reduced order calculation flow are given based on the measured data. Finally, the actual transformer temperature rise test is carried out to ensure the accuracy of the full order model; meanwhile, the temperature field distribution is quickly calculated by using different order reduced models, and the calculation error and time of each order model are compared. The results show that the temperature rise error between the calculated value and the measured value is with in 1.5 ℃. The results of the third-order model and the full order model meet the requirements of POD error specification. Compared with the full order model, the computational time of the reduced order model is reduced from hours-level to seconds-level. The research results verify the accuracy and timeliness of the reduced order model, which can ensure the accuracy of the digital twin model and maximize the efficiency of the solution.
Key words: digital twin model; transformer temperature field; transient fluid solid coupling; reduced order model; proper orthogonal decomposition (POD)

基金资助项目：辽宁省教育厅自然科学基金(JL-2017)；辽宁省科技厅联合创新基金(1646018149614)；中科院计算技术研究所技术服务项目(基于数字孪生技术的变压器多物理场建模与仿真方法研究)。
Project supported by Natural Science Foundation of Liaoning Provincial Department of Education(JL-2017), Joint Innovation Fund of Science and Technology Department of Liaoning Province(1646018149614), Technical Service Project of Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences (Research on Multiphysical Field Modeling and Simulation Method of Transformer Based on Digital Twin Technology).

0　引言

数字孪生技术作为现实与虚拟的枢纽，能够将物理实体全空间尺度、全生命周期[1-3]映射至数字信息世界，在电力行业有着广阔的应用前景。随着电力装备数字孪生概念的提出，构建与物理设备等效且同步运行的数字孪生模型已成为当下研究热点。多物理场仿真作为面向设备性能分析的关键技术，可通过场计算模型获取全局运行参数分布，将其应用于驱动数字孪生模型可实现对设备的监测，但数字孪生技术具有实时性优点，对计算速度有较高要求。目前依靠传统数值模拟方法(如有限元法、有限体积法等)求解物理场计算问题的研究已成熟，但由于传统有限元模型自由度高、且需要同时对空间域与时间域进行离散，导致计算量庞大、计算时间长达小时级，不适用于数字孪生模型。文献[4]从数字孪生模型仿真性能角度提出了时间约束条件，针对研究对象的需求与应用服务特性作为评估准则确定时域误差限，结合时域误差限和模型降阶算法生成高保真降阶模型。电力行业数字孪生技术应用白皮书提出全尺度多物理场模型降阶技术在电力装备数字孪生模型中的必要性，要求在保证孪生模型计算精度的同时提高计算效率[5]。参考 ANSYS 给出的基于模型降阶技术的流场−温度场仿真案例[6]可知，计算时间量级可由传统有限元模型计算小时级提高至降阶模型计算秒级。变压器作为输变电设备，其温度场计算包含绕组温升的热传导与油流传热两部分，属于多物理场耦合计算问题，故需应用瞬态流固耦合方法，而常规耦合计算更加提升了计算复杂度与时长。因此，在满足计算精度的同时对控制方程适当降低运算阶数，用计算量较小的降阶模型求解场分布，从而实现快速计算，对于构建变压器温度场数字孪生模型具有重要意义。

本征正交分解(proper orthogonal decomposition，POD)是一种源于矢量数据统计分析的方法，其本质是将一组离散时刻的数据经矩阵分解获得能够表征数据特征的正交基向量，从中截取一组最优正交基用于重构数据，使其在最小二乘意义上最佳逼近原数据。将 POD 与有限元方法相结合可对基于偏微分方程的物理场搭建降阶模型，实现物理场快速计算[7-8]。在传热学领域，目前针对固体瞬态热传导建立降阶模型广受学者研究，文献[9]将有限元与 POD 方法结合用于瞬态热传导模型降维分析。文献[10]提出用常数边界条件建立瞬态热传导 POD 降阶模态求解时变边界条件，对于时变边界省略重新计算模态的步骤，实现快速预测未知时刻的温度场。文献[11]考虑物性参数受温度变化的影响，提出基于 POD 的变参数非线性瞬态热传导求解方法，通过求解线性瞬态热传导并提取 POD 正交基，基于该正交基构造非线性瞬态热传导降阶模型并求解，有效提高了非线性瞬态热传导的计算效率。文献[12]在文献[11]的基础上结合单元转换法与多级线性化法提出一种加速求解降阶模型的计算方法，可以解决自由度数较少时无法提高计算效率的问题。不同于常规求解最优 POD 正交基，文献[13]提出以求解 POD 解的梯度为优化目标，建立并求解低阶线性方程组，实现快速预测温度场变化。上述温度场降阶研究适用于解决钢板、机翼、涡轮叶片、散热器等固体传热的快速计算，但对变压器而言应考虑流体存在的换热与散热问题。文献[14]应用流固耦合方法计算了变压器在常温环境启动时的瞬态温度场分布，但计算模型阶数庞大导致耗时长。文献[15]将 POD 方法应用于求解变压器瞬态流场速度分布，有效提升了流场控制方程的计算效率，但进一步求解流固耦合未考虑瞬态温度场降阶模型如何搭建。综上所述，针对瞬态流固耦合传热的方法分析变压器温度场的研究，尚未考虑瞬态流固耦合温度场模型如何通过降阶实现快速计算。瞬态流固耦合传热属于温度场问题，只是包含两种物理形态介质温度场之间的双向耦合计算，且耦合模型的边界条件在流体与固体传热中通用，不会产生影响，同时瞬态问题求解时间长。而 POD 降阶模型具备耗时短、精度高的优点，能够快速求解高维系统的物理场控制方程。因此将该方法与有限元方法相结合，可对变压器瞬态温度场搭建降阶模型。由于固体与流体温度场控制方程不同且分界面条件确定方法较困难，若分别搭建降阶模型，会存在计算误差大、计算步骤繁冗的缺陷。针对上述问题，本文将 POD 方法应用于瞬态流固耦合温度场模型，提出了一种快速求解瞬态流固耦合方程的降阶模型搭建方法，并建立统一的流固耦合降阶控制方程，使得耦合温度场模型阶数大幅降低，从而显著提高计算效率。

本文首先建立了基于物联网(internet of things，IoT)的油浸式变压器数字孪生实现架构，然后针对油浸式变压器绕组产热与油流传热特性

分析固体与流体的传热控制方程，同时考虑绕组与油接触面传热条件与计算连续性条件，确保耦合模型实现热量交换，建立了适用于求解变压器瞬态流固耦合温度场控制方程的伽辽金有限元全阶模型。通过求解该有限元方程，将温度场的解张成到由一组正交基向量线性表示的空间，截取前几个正交基组成 POD 降阶模态；将原模型投影至由降阶模态张成的子空间上，实现对原有限元方程的重构，进而搭建瞬态流固耦合温度场降阶模型。最后，针对一台 100 kVA 的油浸式变压器开展温升试验，将伽辽金有限元全阶模型的计算结果与实测值进行比较，验证全阶模型的准确性；进而将降阶模型用于该变压器瞬态温度场快速计算，通过选取多个位置测点的温度值对比不同阶数降阶模型的计算误差以保证准确性；并比较各阶降阶模型与全阶模型的计算时间，同时增设 1 000 kVA 变压器温度场降阶试验，进一步验证所提瞬态温度场构建 POD 降阶模型的时效性。

1 油浸式变压器数字孪生实现架构

电力装备数字孪生体指根据真实场景打造虚拟场景，通过传感与数据交互接口将两个场景相连形成闭环数据交换通道，实现物理设备与数字空间的虚实映射与双向迭代优化，从而基于孪生模型呈现设备状态，基于孪生数据分析设备性能[16]。实现电力装备数字孪生需要 IoT 平台作为载体，本文以油浸式变压器为研究对象，建立了基于 IoT 的变压器数字孪生实现架构，如图 1 所示，主要包含物理层、边缘层、基础设施服务层(infrastructure-as-a-service，IaaS)、平台服务层(platform-as-a-service，PaaS)和软件服务层(software-as-a-service，SaaS)5 部分。

物理层指现实世界中的物理实体，包括变压器的材料、结构、数据及运行环境等。边缘层指依靠先进传感装置对多源异构数据进行采集，这些数据包括变压器运行中各物理场(如电磁、热、流体、结构等)所产生的数据(如电压、电流、损耗、温度、油流速、振动信号等)和所处环境的参量数据。IaaS 层指云端基础设施，服务于多层级之间的数据交互，主要提供数据传输所需的通信协议和服务器，并对数据完成处理、融合与存储等功能。PaaS 层指基于实景建模与可视化、多物理场仿真技术和大数据分析实现数字孪生建模与仿真分析，具体为：实景建模与可视化指采用实景建模技术，按照物理层设备规格参数搭建相应的数字化模型，并以可视化形式实现实体设备的虚拟映射。多物理场仿真技术指根据运行设备内部存在的物理场搭建有限元计算模型进行仿真求解，其应用于电力装备数字孪生模型中可以计算、分析和预测物理设备的未来状态，即“先知”的特点，反映在物理场仿真过程中不仅要求模型计算精度高，更注重模型计算时效性高。其中时效性需求体现在数字孪生模型的计算与修正两方面。在模型计算部分，对于二维及三维物理场模型，其自由度数量通常成千上万，导致迭代计算耗时久，而数字孪生模型作为与实体设备同步运行的映射体，在数据监测的采样时刻内其计算值应与实测值准确对应，因此需结合模型降阶技术将原始有限元全阶模型降成自由度仅为个位级或十位级的降阶模型，应用降阶模型求解物理场可将原有长达小时级的计算时间缩短至秒级，显著提高计算效率。在模型修正部分，为了保证数字孪生模型为实体设备的全周期同步映射，需结合实际传感数据、孪生模型仿真数据与优化算法对数字孪生模型完成修正，假设数据采样周期为模型修正周期，以温度采样周期通常为一小时粒度级为例，则要求孪生模型在采样时刻前完成仿真计算，才能保证与实时传感数据及时对比，进一步分析设备未来状态，实现“先知”意义上的数字孪生。大数据分析指基于人工智能算法与孪生数据对变压器运行状态进行评估与预测。SaaS 层指集成上述各层级功能建设数字孪生软件平台，应用服务于电力装备设计、制造、交付、运维、状态预测分析[17]等全生命周期过程。

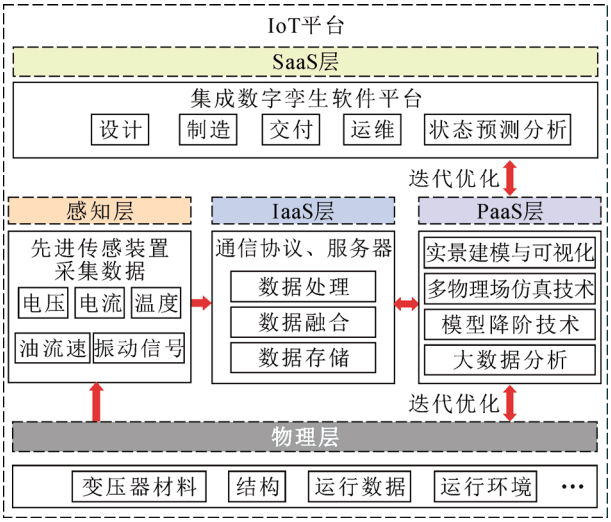


图 1 基于 IoT 的变压器数字孪生实现架构

Fig.1 Digital twin implementation architecture of transformer based on IoT

鉴于此，面向数字孪生模型性能分析的核心技术为多物理场建模与快速仿真，故本文主要针对变压器瞬态温度场数字孪生建模与降阶计算，结合流固耦合温度场有限元方程与 POD 方法搭建降阶模型，并以变压器温升试验为参考开展实例仿真分析，验证降阶模型的优越性。

2　瞬态流固耦合温度场有限元全阶模型

变压器绕组在运行过程中产生的热量主要来源于电流与电阻相互作用产生的欧姆损耗，以热传导形式从内部传递到绕组表面，与变压器油接触后以热对流形式再将热量传递至外界环境[18-19]。变压器绕组与油传热方式如图 2 所示。

其中，流体传热的能量守恒控制方程[20]中温度函数受油速、密度、定压比热容、导热系数、热载荷综合影响，其二维场计算式为

$$\rho c_{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=c_{\mathrm{v}}Q \tag{1}$$

式中：ρ 为介质密度，kg/m³；c_{v} 为介质比热容，J/(kg·℃)；u、v 分别为流体介质在二维坐标系中 x、y 方向的流速分量，m/s；λ 为介质导热系数，W/(m·℃)；Q 为热源密度载荷，W/m³；T 为关于 x、y 与时间 t 的温度函数，℃。

固体传热的二维瞬态热能量守恒控制方程为

$$\rho c_{\mathrm{v}}\frac{\partial T}{\partial t}-\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=c_{\mathrm{v}}Q \tag{2}$$

比较式(1)和式(2)可以看出，当流体的流速为 0 时，热对流与热传导控制方程完全等效，只需区别不同介质所在计算域的物性参数，即可求解整场温度分布。

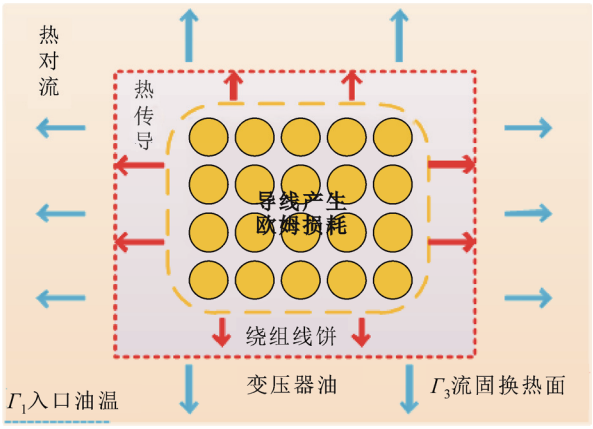


图 2　变压器绕组与油传热示意图

Fig.2　Schematic diagram of transformer winding and oil heat transfer

结合上述传热特性理论建立瞬态流固耦合温度场数学模型，考虑绕组与油之间热量交换属于固体与流体之间传热，引入壁面连续性边界条件求解流固耦合问题，流固耦合涉及温度连续性条件、热流密度连续性条件，并施加第一类和第三类边界条件，因此流固耦合数学模型可表示为

$$\begin{cases}\rho c_{\mathrm{v}}\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}+u\dfrac{\partial T}{\partial x}+v\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)-\lambda\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=c_{\mathrm{v}}Q\\ T|_{\Gamma_1}=T_{\mathrm{b}}\\ \lambda_{\mathrm{b}}\dfrac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_3}=h(T_{\mathrm{f}}-T)\\ T|_{s_{\mathrm{a}}}=T|_{s_{\mathrm{b}}}\\ \lambda_{\mathrm{a}}\dfrac{\partial T}{\partial n}|_{s_{\mathrm{ab}}}=\lambda_{\mathrm{b}}\dfrac{\partial T}{\partial n}|_{s_{\mathrm{ba}}}\end{cases} \tag{3}$$

式中：第 2 个计算式为第一类边界条件，即给定边界 Γ_1 的温度值为 T_{b}；第 3 个计算式为第三类边界条件，即给出边界 Γ_3 上温度的梯度值与边界流体温度 T_{f} 的关系，h 为流体的对流换热系数，W/(m²·℃)；第 4、5 个计算式分别为温度连续性条件和热流密度连续性条件，λ_{a} 和 λ_{b} 分别为绕组和变压器油的导热系数，s_{a} 和 s_{b} 分别代表固体分界面与流体分界面；s_{ab} 表示热量从沿分界面法向方向由 a 传至 b；n 为边界外法线方向。

对于求解如式(3)第 1 个计算式的复杂微分方程，可以采用加权余量法将微分方程转换为积分方程形式方便进一步求解，通过引入权函数 W 使余量积分为零，从而保证积分方程完全等效于微分方程。根据加权余量法建立有限元积分方程实现空间域离散化，有限元离散方程表示为

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\rho c_{\mathrm{v}}W_e^{\Omega}\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}hW_l^{\Gamma}T\mathrm{d}\Gamma+\\&\int_{\Omega}W_e^{\Omega}\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\rho c_{\mathrm{v}}W_e^{\Omega}\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\Omega=\\&\int_{\Omega}c_{\mathrm{v}}W_e^{\Omega}Q\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}hW_l^{\Gamma}T_{\mathrm{f}}\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{4}$$

式中：Ω 和 Γ 分别为面积区域与边界区域；$W_e^{\Omega}=\left[W_i^{\Omega},W_j^{\Omega},W_m^{\Omega}\right]$ 为三角形单元权函数，e 为场域三角形单元序号；$W_l^{\Gamma}=\left[W_i^{\Gamma},W_j^{\Gamma}\right]$ 为线单元权函数；l 为场域线单元序号。

将温度 T 用单元形函数 N 与节点温度列向量 $\boldsymbol{T}_n$ 表示为插值函数 $\boldsymbol{T}=N\boldsymbol{T}_n$，$n=1,2,\cdots,N_{\mathrm{m}}$（$N_{\mathrm{m}}$ 为整场节点数），求解式(4)需分别设置面积单元形函数 $\boldsymbol{N}_e^{\Omega}=\left[N_i^{\Omega},N_j^{\Omega},N_m^{\Omega}\right]$ 和边界单元形函数 $\boldsymbol{N}_l^{\Gamma}=\left[N_i^{\Gamma},N_j^{\Gamma}\right]$，$\boldsymbol{T}_n=\left[T_1,T_2,\ldots,T_{N_{\mathrm{m}}}\right]^{\mathrm{T}}$ 为节点温度列向

量。依据伽辽金准则，将单元形函数作为权函数代入积分方程。将温度插值函数代入式(4)，并结合格林公式

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\lambda N\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\Omega=\\&-\int_{\Omega}\lambda\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}+\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\boldsymbol{T}_n\mathrm{d}\Omega+\oint\lambda N\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}\tag{5}$$

进一步整理式(4)得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{e=1}^{n_e}\int_{\Omega_e}\rho c_{\mathrm{v}}\left[\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\mathrm{d}\Omega_e\right)\frac{\partial \boldsymbol{T}_n}{\partial t}+\\&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{e=1}^{n_e}\int_{\Omega_e}\rho c_{\mathrm{v}}\left[\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\right]^{\mathrm{T}}\left(u\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial x}+v\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega_e\right)\boldsymbol{T}_n+\\&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{e=1}^{n_e}\int_{\Omega_e}\lambda\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial x}+\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial y}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega_e\right)\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}+\\&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{e=1}^{n_l}\int_{\Gamma_e}h\left[\boldsymbol{N}_l^{\Gamma}\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_l^{\Gamma}\mathrm{d}\Gamma_e\right)\boldsymbol{T}_n=\\&\sum_{e=1}^{n_e}\int_{\Omega_e}c_{\mathrm{v}}\left[\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\right]^{\mathrm{T}}Q\mathrm{d}\Omega_e+\sum_{e=1}^{n_l}\int_{\Gamma_e}h\left[\boldsymbol{N}_l^{\Gamma}\right]^{\mathrm{T}}T_{\mathrm{f}}\mathrm{d}\Gamma_e\end{aligned}\tag{6}$$

式中：n_e为整场三角形网格单元数；n_l为边界条件中线单元数。由于固体与流体的接触边界节点为公用节点，且边界两边的温度与热流密度相等，即热流密度连续性条件和温度连续性条件的加权积分为零，故自动满足流固耦合条件。而第一类边界条件属于强制边界条件，不参与积分计算，因此式(6)为瞬态温度场有限元离散方程的最终形式。

式(6)可简化为由$N_{\mathrm{m}}\times N_{\mathrm{m}}$的热容矩阵$\boldsymbol{C}$、导热率矩阵$\boldsymbol{K}$和$N_{\mathrm{m}}\times 1$的热载荷向量$\boldsymbol{Q}$、节点温度列向量$\boldsymbol{T}_n$和其对时间的导数$\dot{\boldsymbol{T}}_n$组成的矩阵计算式，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}\\\boldsymbol{C}=\sum_{n_e}\int_{\Omega_e}\rho c_{\mathrm{v}}\left[\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\mathrm{d}\Omega_e\\\boldsymbol{K}=\sum_{n_e}\int_{\Omega_e}\rho c_{\mathrm{v}}\left[\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\right]^{\mathrm{T}}\left(u\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial x}+v\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega_e+\\\quad\sum_{n_e}\int_{\Omega_e}\lambda\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial x}+\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial y}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega_e+\\\quad\sum_{n_l}\int_{\Gamma_3}h\left[\boldsymbol{N}_l^{\Gamma}\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_l^{\Gamma}\mathrm{d}\Gamma_e\\\boldsymbol{Q}=\sum_{n_e}\int_{\Omega_e}c_{\mathrm{v}}\left[\boldsymbol{N}_e^{\boldsymbol{\Omega}}\right]^{\mathrm{T}}Q\mathrm{d}\Omega_e+\sum_{n_l}\int_{\Gamma_3}h\left[\boldsymbol{N}_l^{\Gamma}\right]^{\mathrm{T}}T_{\mathrm{f}}\mathrm{d}\Gamma_e\end{cases}\tag{7}$$

对式(7)中时间项采取伽辽金型差分格式进行时间域离散化，与离散空间域方法类似，将时间域分散成若干单元，单元即为时间步Δt，构造温度随时间变化的插值函数并代入式(7)，整理可得

$$\left(\frac{C}{\Delta t}+\theta\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{T}_{t+\Delta t}-\left(\frac{C}{\Delta t}-(1-\theta)\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{T}_t=\boldsymbol{Q}\tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{T}_t$为t时刻的节点温度列向量；θ为权函数的确定系数，取伽辽金差分格式$\theta=2/3$；Δt为时间步。

综上所述，通过给定$t=0$时刻节点温度初始值，随着每个网格节点依次递推计算更新参数矩阵$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{Q}$，即可计算出每时刻的节点温度值。

3 基于 POD 的变压器温度场数字孪生模型

3.1 POD 算法原理介绍

经过式(8)计算，抽取m个离散时间点内部分时刻各节点的温度值作为样本数据，组成快照矩阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\cdots,\boldsymbol{\psi}_m]$，其中$\boldsymbol{\psi}_i=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N_{\mathrm{m}}}]^{\mathrm{T}}$表示某一时刻的节点温度列向量。对于离散系统而言，可以将i时刻的$\boldsymbol{\psi}_i$表示为由一组正交基线性表示的方程组，即

$$\boldsymbol{\psi}_i=\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\psi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)\boldsymbol{\phi}_j,\ i=1,2,\cdots,m\tag{9}$$

而 POD 方法是通过截取前s项$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\phi}_1,\boldsymbol{\phi}_2,\cdots,\boldsymbol{\phi}_s]$作为 POD 正交基，重构节点温度列向量$\hat{\boldsymbol{\psi}}_i=\sum_{j=1}^{s}(\boldsymbol{\psi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)\boldsymbol{\phi}_j$，使其满足与$\boldsymbol{\psi}_i$在最小二乘意义上的误差最小[21-22]，即$\hat{\boldsymbol{\psi}}_i$与$\boldsymbol{\psi}_i$近似等效。满足的约束条件为

$$\min_{\{\boldsymbol{\phi}\}_1^s}\sum_{i=1}^{m}\left\|\boldsymbol{\psi}_i-\sum_{j=1}^{s}(\boldsymbol{\psi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)\boldsymbol{\phi}_j\right\|_2^2,\ \delta_{ij}=\begin{cases}1,&i=j\\0,&i\neq j\end{cases}\tag{10}$$

式中：$\|\cdot\|_2$为L^2范数；$(\cdot,\cdot)$为 Hilbert 内积；δ_{ij}为克罗内克函数。对上式求极值可以结合 Lagrange 乘子法转换为求解特征向量的问题，即

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\phi}=\lambda\boldsymbol{\phi}\tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{R}$为$N_{\mathrm{m}}\times N_{\mathrm{m}}$的协方差矩阵，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；$\lambda$和$\boldsymbol{\phi}$分别为协方差矩阵的特征值与特征向量。此时$\boldsymbol{R}$为$N_{\mathrm{m}}$阶方阵，若直接对其进行求解，计算量庞大。而 POD 方法只需截取前几个特征向量作为降阶模态，即可最大程度表征原数据特征。

首先对快照矩阵$\boldsymbol{A}$进行奇异值分解，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\Sigma_{\sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$分别为$N_{\mathrm{m}}\times N_{\mathrm{m}}$的左奇异矩阵和$m\times m$的右奇异矩阵；$\Sigma_{\sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m,0,\cdots,0)$为$N\times m$奇异值矩阵。

通过计算$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$可以看出其特征值$\lambda$与$\boldsymbol{A}$的特征值$\sigma_i(i=1,2,\cdots,m)$存在平方关系$\lambda=\sigma^2$。由于$\boldsymbol{A}$为$N_{\mathrm{m}}\times m$矩阵且$N_{\mathrm{m}}\gg m$，若直接对$\boldsymbol{A}$进行奇异值分解进而计算$\lambda$，计算量大且分解困难。分析$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$可知其列向量$\boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{v}_i$分别为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$的特征向量。因此，可以转变求解思路，改为对协方

差矩阵作奇异值分解，故式(11)可以转变为求解 $\boldsymbol{u_i}=[u_1,u_2,\cdots,u_{\mathrm{N}}]$。

由于 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 均为正交矩阵，将式(12)作矩阵变换可得 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{AV}/\Sigma_\sigma$，不难发现通过求解 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{v_i}$ 即可代入求解 $\boldsymbol{u_i}$，这样就得到了一组正交基向量。在此基础上截取前 s 个特征向量作为 POD 降阶模态 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\phi_1},\boldsymbol{\phi_2},\cdots,\boldsymbol{\phi_s}]=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_s]$，截取原则为根据式(13)计算满足式(14)或式(15)，即

$$\lambda_i=\left\|\boldsymbol{\psi_i}-\sum_{j=1}^{s}(\boldsymbol{\psi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)\boldsymbol{\phi}_j\right\|_2^2 \tag{13}$$

$$\chi=100\times\sum_{i=s+1}^{N_{\mathrm{m}}}\lambda_i/\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{m}}}\lambda_i\le 0.01\% \tag{14}$$

$$\varepsilon=100\times\sum_{i=1}^{s}\lambda_i/\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{m}}}\lambda_i\ge 99.99\% \tag{15}$$

式中：χ 为 POD 截断误差；ε 为降阶模态能量捕获百分比。可以看出特征值 λ_i 为式(10)中的最小化项，最小化的目的是尽可能减小误差。此时用 λ_i 对应的前 s 个特征向量，即 POD 正交基，重构节点温度列向量 $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ 即可表征样本数据的特征。

3.2　瞬态温度场降阶模型

依据前文论述的 POD 算法原理与选取降阶模态的误差截取准则，通过瞬态温度场有限元数值计算得到任意时刻的节点温度列向量，并选取部分时刻温度值构成样本数据，最终获得由 s 个正交基组成的 POD 降阶模态 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\phi}_1,\boldsymbol{\phi}_2,\cdots,\boldsymbol{\phi}_s]$，利用该降阶模态重构温度样本数据，即 $\hat{\boldsymbol{\psi}}=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s]^{\mathrm{T}}$ 可以由 $\boldsymbol{P}$ 线性表示为

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}=\sum_{j=1}^{s}(\boldsymbol{\psi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)\boldsymbol{\phi}_j=\boldsymbol{P\alpha} \tag{16}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{\psi}}$ 为重构节点温度列向量；$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]^{\mathrm{T}}$ 为正交基的系数列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_j$。将 $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ 代入式(8)中 $\boldsymbol{T}_n$ 项，同时在方程两侧均乘以 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，可得降阶后的瞬态温度场控制方程如下所示。

$$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t}\boldsymbol{P}+\frac{2}{3}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KP})\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t}\boldsymbol{P}-\frac{1}{3}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KP})\boldsymbol{\alpha}_n \tag{17}$$

由此可见，瞬态温度场控制方程中各系数矩阵的阶数由 N_{m} 变成 s，方程每次递推计算更新的值也由原来的节点温度 T 变为正交基系数 α。最后，将正交基系数代回式(16)便可以计算每一时刻的节点温度值。

3.3　变压器数字孪生建模及降阶计算流程

通过前文推导瞬态温度场有限元数值离散方程与 POD 降阶模态的提取方法，本节结合实测数据搭建基于 POD 的变压器瞬态温度场降阶模型，实现流程如图 3 所示。具体步骤如下所述。

1）按照实际尺寸搭建变压器温度场有限元全阶模型，获取实测数据计算热源密度与油流速作为模型激励源，对不同介质划分计算域并设置物性参数、初始值与求解参数。

2）根据式(8)计算规定时间内每一时刻的节点温度列向量作为样本数据，从中选取 m 个时间点对应的温度列向量组成样本矩阵。

3）通过奇异值分解协方差矩阵获得一组正交基向量，从该组正交基中截取前 $s(s\ll N_{\mathrm{m}})$个作为 POD 降阶模态，降阶模态的选取应满足截断误差 $\chi\le 0.01\%$，用 POD 降阶模态重构样本矩阵，并将其改写为由降阶模态线性表示的函数形式，代入式(8)即得到瞬态流固耦合温度场的降阶模型。

4　实例仿真分析

本文采用 MATLAB 语言编写有限元数值计算模型与降阶算法实现降阶模型搭建，将 POD 瞬态流固耦合温度场降阶模型应用于油浸式变压器绕组温升与油传热的场计算，比较了截取不同正交基数目时，其对应的不同阶数降阶模型的计算精度与计算时间。

4.1　数值计算模型

本节针对 1 台容量为 100 kVA 的油浸式变压器的绕组局部结构及油路建立计算模型如图 4 所示。

图 4 所示的绕组及油路的局部结构计算模型的尺寸为 30 mm×100 mm，绕组部分包含 4 个线饼，每个线饼宽度为 20 mm，高度为 15 mm；水平油路的高度为 10 mm，竖直油路的宽度为 5 mm。模型的网格均采用三节点三角形单元划分，网格单元数为 6 000，自由度为 3 131。由于计算模型中包含绕组和油两种介质，各介质的物性参数包括密度、比热容、导热系数、对流换热系数及动力粘性系数。变压器绕组和油的物性参数如表 1 所示。

进一步求解流固耦合温度场模型，其初始值与求解参数设置具体包括：

1）绕组温升过程中的热量主要来源于欧姆损耗，将热量按照均匀的单位体积热源设定，由热量密度计算式 $Q=P/V$，根据负载试验测得该变压器负载损耗 P=1 497 W，与绕组体积 V 相除得到单位体积热源密度为 2.56×10^4 W/m^3 并以热载荷形式施加在绕组区域。

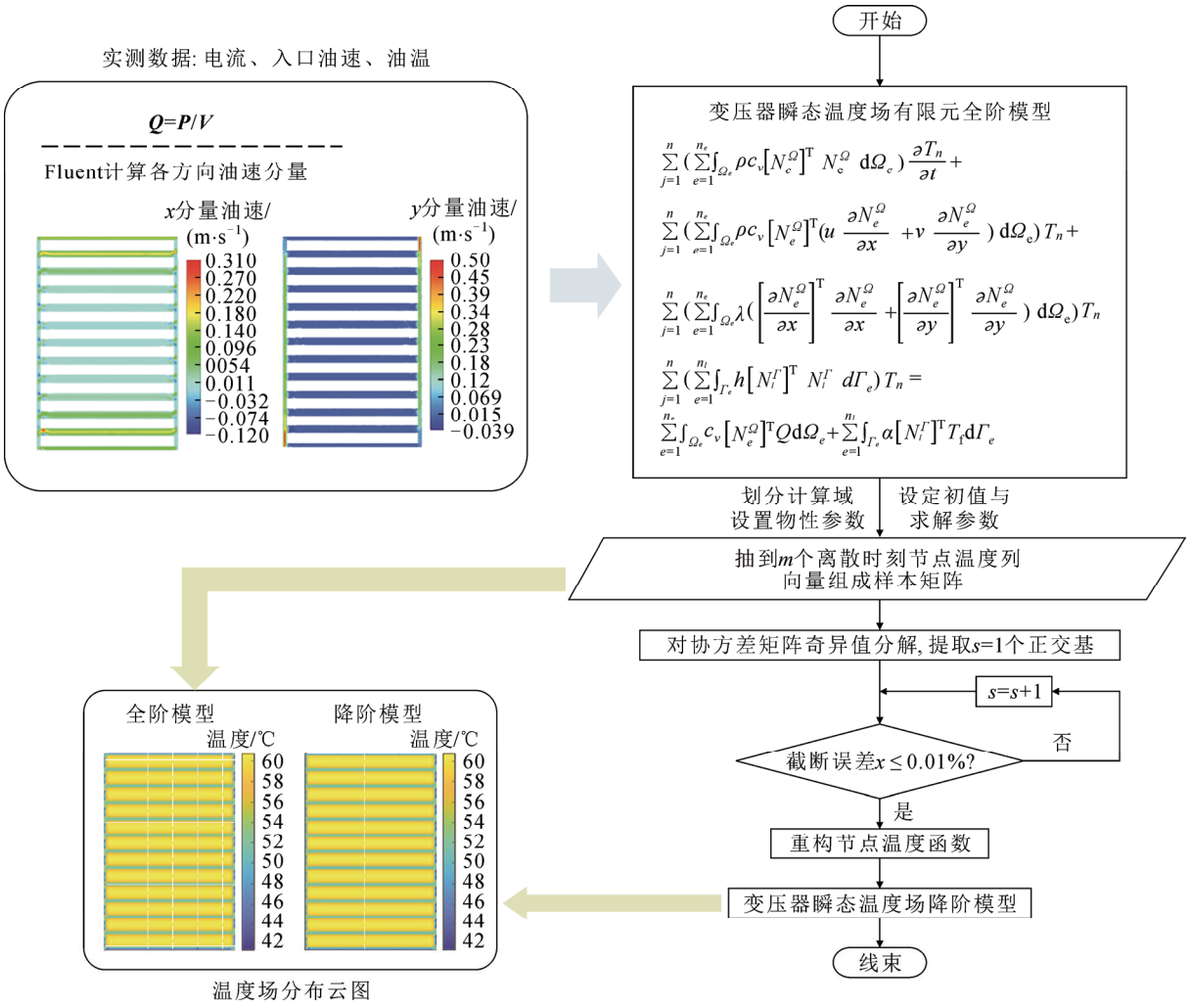


图 3 变压器数字孪生建模及降阶计算流程

Fig.3 Flow of transformer digital twin modeling and reduced order calculation

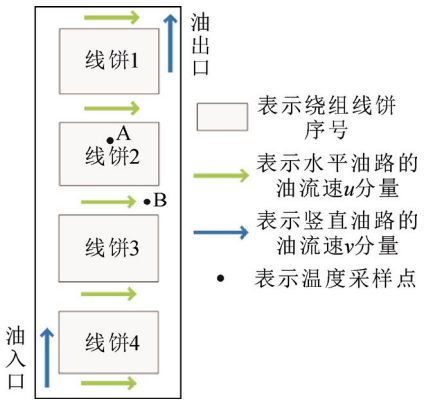


图 4 绕组及油路计算模型

Fig.4 Calculation model of winding and oil circuit

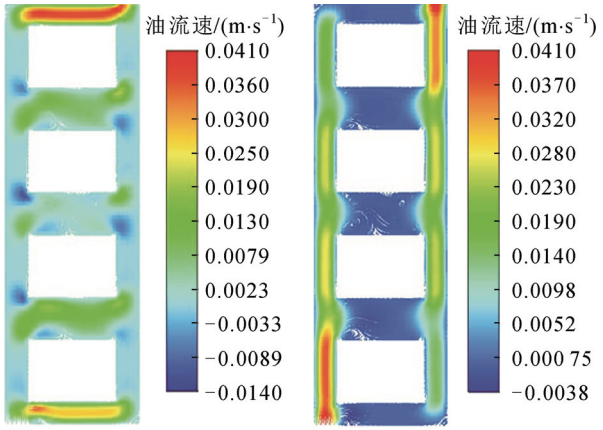
表 1 介质物性参数

Table 1 Physical parameters of medium

介质	物性参数	数值
绕组	密度/(kg·m^{-3})	8798.0
	定压比热容/(J·(kg·℃)$^{-1}$)	381.0
	导热系数/(W·(m·℃)$^{-1}$)	387.6
变压器油	密度/(kg·m^{-3})	$904.34-0.712T$
	定压比热容/(J·(kg·℃)$^{-1}$)	$170.18+3.58T$
	导热系数/(W·(m·℃)$^{-1}$)	$0.132-7.101\times10^{-5}T$
	对流换热系数/(W·(m^2·℃)$^{-1}$)	150
	动力粘性系数/(Pa·s)	0.08

2）本文借助 Fluent 软件搭建流体模型，设置入口油流速为 0.05 m/s，油温 42 ℃，出口为自然流出方式，得到各方向油流速分布云图如图 5 所示。计算流固耦合温度场之前需指出，文中假设水平油路和竖直油路的油速均匀分布，考虑各方向速度取均值，因此给定油流速的 x 分量为 u=0.015 m/s，y 分量为 v=0.025 m/s。

3）绕组和变压器油的初始温度分别设为 30.1 ℃和 30 ℃，保证边界温差条件。在瞬态求解中对时间域的离散时间步长取 $\Delta t=2$ s，计算 30 min 内的温度变化，离散的时间步数为 900 步。



(a) 油流速x分量　(b) 油流速y分量

图 5　油流速分布云图

Fig.5　Nephogram of oil velocity distribution

4.2　全阶模型计算值与实测值比较

为了验证全阶模型的准确性，基于沈阳市某高压变电站数字孪生改造项目开展变压器温升试验。考虑绕组热点温度位于绕组中部，而最高温升位于水平油路偏右，将 2 个光纤测温传感器布置于计算模型中 A、B 两点对应的实际绕组位置。温升过程中选取 t 为 $300\Delta t$、$600\Delta t$、$900\Delta t$ 时刻的实测值与全阶模型计算值，进而对比两个阶段的实测温升与计算温升，结果如表 2 所示。

由表 2 可知，实测值与计算值的温升误差绝对值<1.5 ℃，根据标准 DL/T 1400—2015 规定温升误差绝对值应不大于 3.2 ℃，故满足实际误差要求。因此，应用该全阶模型计算变压器绕组温度场可表征实际绕组温升过程。

4.3　不同阶数降阶模型的计算精度

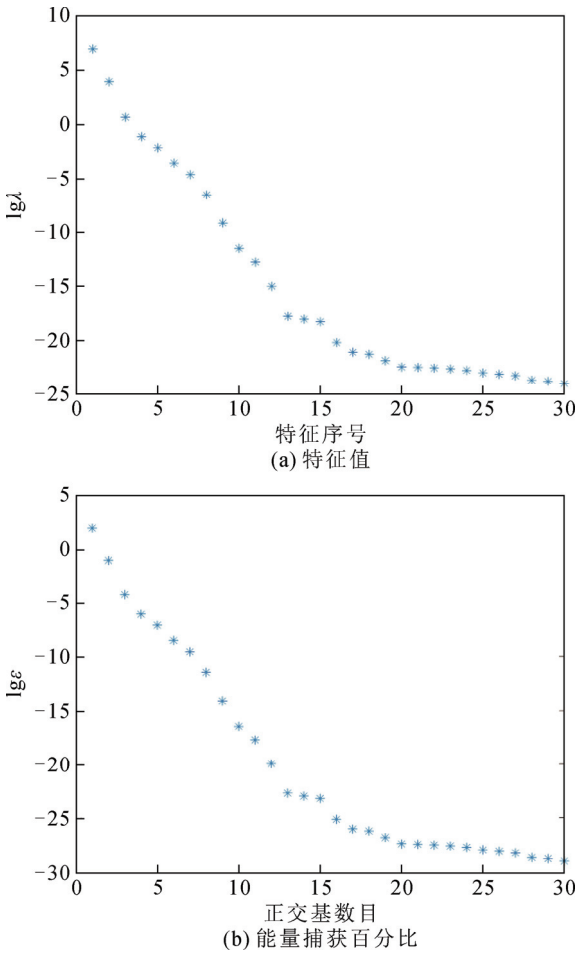
由式(8)建立瞬态温度场有限元方程计算得到每个离散时刻的节点温度值，由于温升过程属于累积效应，瞬时温度变化甚微且温升不同，根据等温升的时间节点抽取 30 个时刻的节点温度列向量构成快照矩阵 $\boldsymbol{A}$。等温升抽取各时刻的节点温度可以表征温升过程中温度随时间的非线性变化，初始温升阶段的温度变化量较大，而随着温度的不断升高，温升逐渐减小，到末期温升阶段的温度变化逐渐趋于平缓，最终达到稳定状态。

结合式(11)—式(12)对协方差矩阵作奇异值分解计算获得 30 个正交基及其对应的特征值。由于特征值之间数量级差距悬殊，按照常数分布排列难以直观对比特征值大小，因此将特征值取对数，其对数分布情况如图 6(a)所示，其大小表征对应的正交基捕获样本数据的特征情况，特征值越大，捕获特征的能力越强，捕获能量百分比越大。能量捕获百分比对数分布如图 6(b)所示。

表 2　全阶模型计算温升与实测温升比较

Table 2　Comparison between calculated value of full order model and measured value

传感器位置	参数	数值	
		$300\Delta t \sim 600\Delta t$	$600\Delta t \sim 900\Delta t$
节点 A	实测温升/℃	7.16	2.01
	计算温升/℃	7.66	2.66
	温升误差/℃	－0.5	－0.5
节点 B	实测温升/℃	4.16	3.13
	计算温升/℃	5.55	1.72
	温升误差/℃	－1.39	1.41



(a) 特征值

(b) 能量捕获百分比

图 6　对数分布图

Fig.6　Logarithmic distribution diagram

由图 6 可知，特征值由大到小排列，前几个较大的特征值所对应正交基捕获样本数据特征的能力最强，且特征值之间差值很大，从第 4 个特征值开始其数量级已达到 10^{-2}，最小的特征值数量级可达 10^{-25}。

当正交基数目分别取 1、2、3、4 时，通过 POD 截断误差计算式 $\chi=\sum_{i=s+1}^{N}\lambda_i/\sum_{i=1}^{N}\lambda_i$ 计算得到其截断误差分别为 1.02×10^{-3}、8.23×10^{-6}、7.66×10^{-6}、7.65×10^{-6}，此时用这些正交基根据式(14)重构样本数据函数，进一步可以获得瞬态温度场的降阶模型。

由于 3 阶、4 阶及以上降阶模型的截断误差基本稳定在 7.6×10^{-6}，因此本文截取前 3 个正交基作为 POD 降阶模态，分别代入式(15)得到 1 阶、2 阶和 3 阶降阶模型。应用不同阶数的降阶模型和全阶模型计算瞬态温度场，得到温度分布云图如图 7 所示，方框圈出部分为局部放大温度云图如图 8 所示。可以看出，1 阶降阶模型可以计算出大致的温度场分布，但由局部放大云图可知水平油路的油温分布区别较大，2 阶和 3 阶降阶模型的温度分布更符合全阶模型。

为了准确分析温度随时间的变化特征，文中在绕组区域和变压器油区域分别选取节点 A 和节点 B，在 t 为 $30\Delta t$、$60\Delta t$、…、$90\Delta t$ 时抽取各时间节点的温度，统计 30 min 之内分别应用 1 阶、2 阶、3 阶降阶模型及全阶模型计算各节点的温度值，并绘制温度变化曲线如图 9—图 10 所示。

由图 9 和图 10 可以看出，由于温升过程属于相对均匀增长的变化过程，无骤增或骤减情况，因此采用不同阶数的降阶模型计算得到的温度变化趋势与全阶模型基本一致。在计算精度方面，采用 1 阶与 2 阶模型的温度计算值相比于 3 阶模型和全阶模型的计算值略大。比较 3 阶模型与全阶模型的计算结果可知二者温度曲线基本相符，这表明截取前 3 个正交基构造的降阶模型计算精度较高，更适用于表征全阶模型计算温度场分布。

为了直观比较不同阶数的降阶模型计算误差，本文另选 5 个能够体现整场温度的节点，根据图 9 可知降阶模型在计算水平油路温度时会产生较大误差，因此在绕组间隙的 3 条水平油路区域中各取 1 个节点表征油温，在 1 号线饼和 3 号线饼中心各取 1 个节点表征绕组温度，将以上 5 个节点温度作为样本，并采集 t 为 $30\Delta t$、$60\Delta t$、…、$90\Delta t$ 时刻的节点温度组成样本数据，将 t 时刻的不同阶数降阶模型计算值 T_{P} 与全阶模型计算值 T_{F} 相结合计算平均相对误差 E_{MR}，将其作为基于 POD 的瞬态温度场降阶模型评价指标。误差计算式表示为

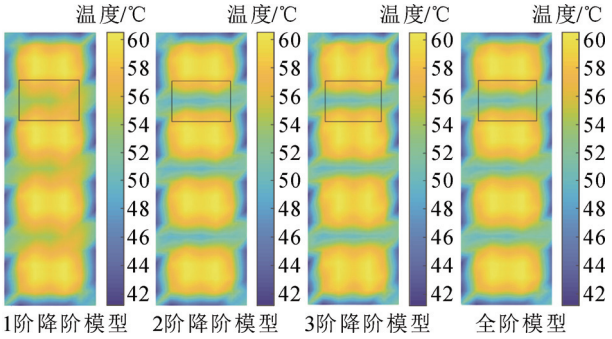


图 7 不同阶数模型的温度分布

Fig.7 Temperature distribution of different orders models

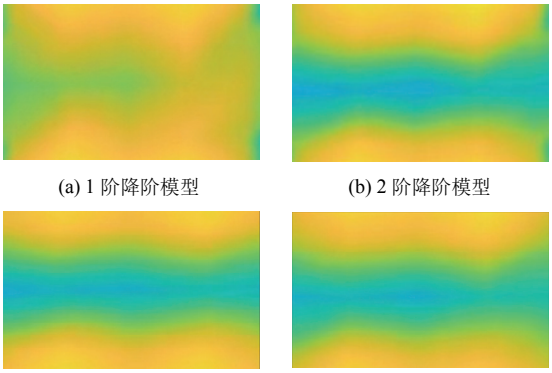


图 8 局部放大温度分布

Fig.8 Locally amplified temperature distribution

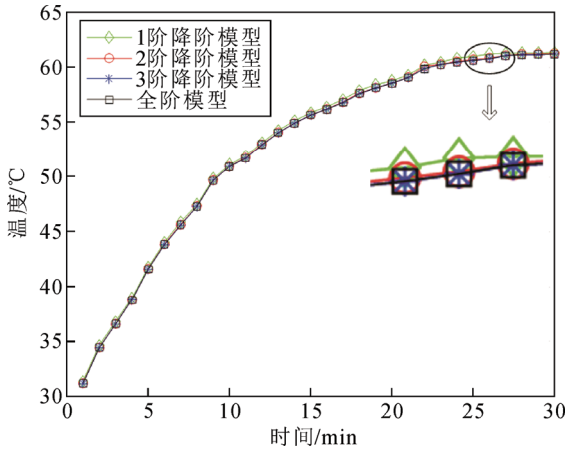


图 9 不同阶数模型的节点 A 温度变化曲线

Fig.9 Temperature change curve of node A with different order models

$$E_{\mathrm{MR}}=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\mu}\left|\frac{T_{\mathrm{F}_i}-T_{\mathrm{P}_i}}{T_{\mathrm{F}_i}}\right| \tag{18}$$

式中：μ 为抽取样本节点温度的时刻个数。统计上述 5 个节点温度样本应用不同阶数降阶模型的计算误差，结果如表 3 所示。

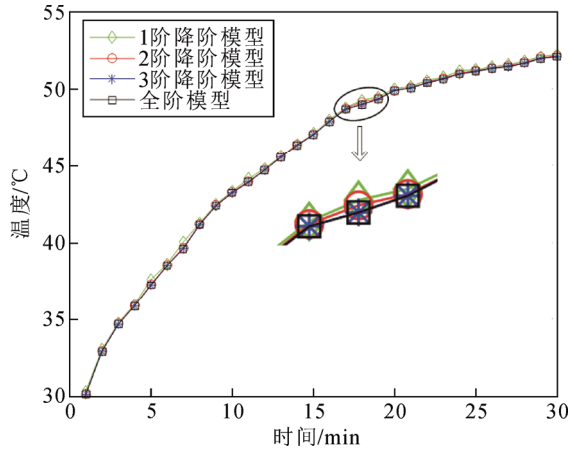


图 10　不同阶数模型的节点 B 温度变化曲线

Fig.10　Temperature change curve of node B with different order models

由表 3 可知，随着降阶模型的阶数增加，降阶模型的计算误差逐渐降低。比较各阶模型的计算误差不难看出，前两阶模型对 3 阶模型的误差数量级倍数分别是百倍和十倍。根据前文截取正交基数目为 3 和 4 时的截断误差相差很小，因此 3 阶、4 阶降阶模型的计算误差基本一致。分析结果进一步说明 3 阶与 4 阶降阶模型的计算精度能够最大程度贴近准确值，体现了 POD 降阶模型的准确性。

4.4　降阶模型与全阶模型的计算时间

通过分析式(8)可知，各矩阵维度大小与方程阶数均由模型自由度决定。在全阶模型中，方程的阶数为 3131，而 1 阶、2 阶、3 阶和 4 阶降阶模型所对应的方程阶数分别为 1、2、3、4。因此，求解低阶方程的计算时间要远远少于高阶方程。表 4 给出了不同阶数降阶模型与全阶模型的计算时间。

由表 4 可知，全阶模型的计算时间约为 48 min，而 3 阶、4 阶模型耗时与其相比分别减少到原来的 0.61%、0.70%，并且计算时间受模型自由度与瞬态求解的时间步数同时影响，随着模型自由度与时间步的增多，模型的计算时间越长。比较 3 阶与 4 阶模型，在计算精度一致的前提下，3 阶模型计算时间更短，适合作为最优降阶模型。

为了进一步验证 POD 降阶模型的计算效率，另选取一台相同电压等级、容量为 1 000 kVA 油浸式变压器进行建模仿真。截取局部绕组结构搭建计算模型如图 11 所示，总尺寸为 130 mm×192 mm，绕组的线饼宽度为 120 mm，高度为 10 mm；水平油路的高度为 6 mm，竖直油路的宽度为 5 mm。

表 3　不同阶数降阶模型的节点温度样本误差统计

Table 3　Node temperature sample error statistics of reduced order models with different orders

样本序号	误差/%			
	1 阶模型	2 阶模型	3 阶模型	4 阶模型
样本 1	7.142	0.192	0.012	0.012
样本 2	6.933	0.227	0.014	0.013
样本 3	6.998	0.166	0.008	0.008
样本 4	2.434	0.114	0.011	0.011
样本 5	2.528	0.125	0.013	0.012

表 4　不同阶数模型的计算时间

Table 4　Calculation time of different order models

阶数	搭建计算模型时间/s	截取降阶模态时间/s	递推计算时间/s	总时间/s	时间百分比/%
1 阶	2.5	0.2	10.2	12.9	0.45
2 阶	2.5	0.2	12.5	15.2	0.53
3 阶	2.5	0.2	14.9	17.6	0.61
4 阶	2.5	0.2	17.5	20.2	0.70
全阶	2.5	0.0	2 867.3	2 869.8	100

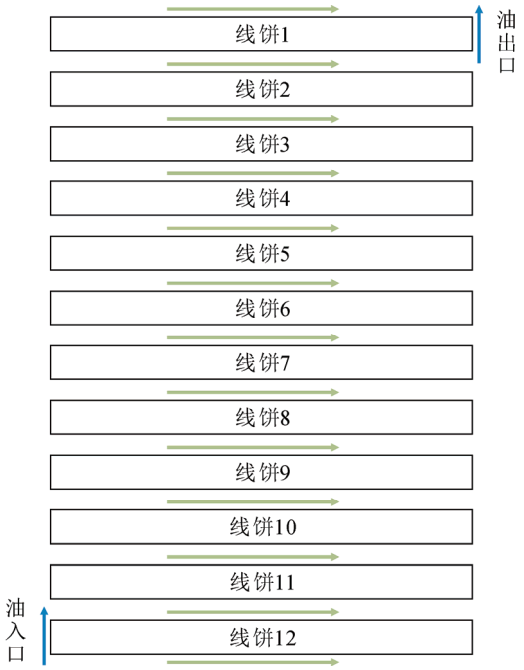


图 11　绕组及油路计算模型

Fig.11　Calculation model of winding and oil circuit

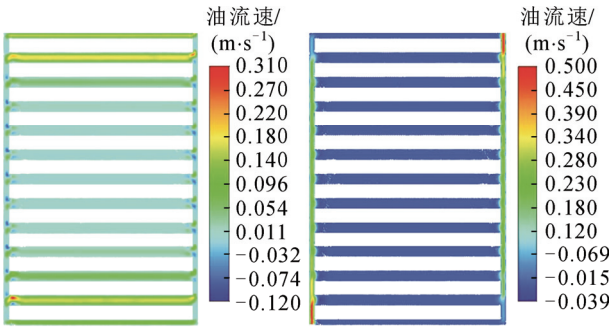
同样采用三角形单元剖分网格，根据实际设备尺寸同比放大网格尺寸以保证所提流固耦合温度场计算模型的适用性与准确性，该模型网格单元数为 20 160，自由度为 13 606。

模型各部分介质物性参数同表 1。由标准 GB/T 6451—2008 可知该型号变压器负载损耗为 10.98 kW，计算单位体积热量密度为 2.64×10^4 W/m^3。搭建流体模型时给定入口流速为 0.5 m/s，出口为自然

流出方式，各方向油流速分布云图如图 12 所示。同样考虑各方向油速均匀分布并取均值，故取油流速的 x 分量为 0.03 m/s，y 分量为 0.25 m/s。其他初始值与求解参数保持不变。

应用流固耦合温度场有限元模型计算每时刻各节点温度值，取 30 个等温升时刻节点组成快照矩阵。根据式(13)计算当截取 POD 正交基数目分别取 3 和 4 时，能量捕获百分比稳定在 99.9996%，故建立 3 阶降阶模型计算温度场。图 13 为 3 阶降阶模型与全阶模型的计算温度分布云图，可认为两者计算结果基本一致。最后，表 5 给出了不同阶数降阶模型与全阶模型的计算时间。

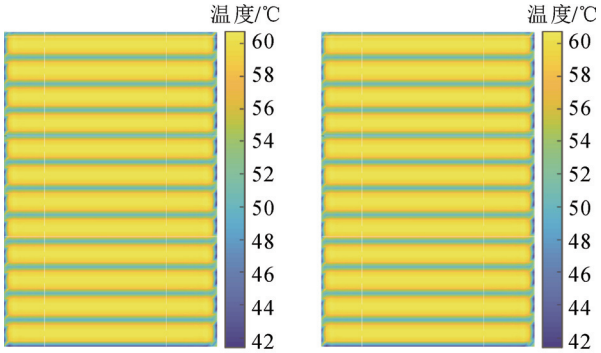
由表 5 可知，自由度为 13 606 的全阶模型的计算时间约为 155 min，而 3 阶、4 阶模型耗时与其相比分别减少到原来的 0.47%、0.49%。综上所述，应用降阶模型求解瞬态温度场可以在满足计算精度的基础上极大程度节省计算时间，且时间可达到秒级。结合变压器温度监测采样周期通常为一小时粒度级，故本文所提瞬态温度场降阶模型能够良好用于变压器数字孪生中物理场快速计算。



(a) 油流速x分量 (b) 油流速y分量

图 12 油流速分布云图

Fig.12 Nephogram of oil velocity distribution



(a) 3阶降阶模型 (b) 全阶模型

图 13 不同阶数模型的温度分布

Fig.13 Temperature distribution of different order models

表 5 不同阶数模型的计算时间

Table 5 Calculation time of different order models

阶数	搭建计算模型时间/s	截取降阶模态时间/s	递推计算时间/s	总时间/s	时间百分比/%
1 阶	6.2	1.3	32.4	39.9	0.43
2 阶	6.2	1.3	34.7	42.2	0.46
3 阶	6.2	1.3	36.5	44.0	0.47
4 阶	6.2	1.3	38.3	45.8	0.49
全阶	6.2	0.0	9 258.8	9 266.1	100

5 结论

1）在计算精度方面，各阶降阶模型均能体现温升变化的大致趋势，但数值存在差异。随着截取正交基数目的增加，对应降阶模型的计算结果越贴近于全阶模型，当正交基数目为 3 时，降阶模型的计算结果接近全阶模型，该误差对仿真结果的影响可忽略不计。

2）在计算时间方面，分别以自由度为 3 131 和 13 606 的 2 种计算模型为例，其 3 阶模型耗时比全阶模型分别减少到原来的 0.61%和 0.47%，计算时间达到秒级，在与 4 阶模型计算精度一致的前提下其时间更短。而自由度越高的计算模型其降阶模型计算效率提高越明显。

参考文献 References

[1] 杨 帆，吴 涛，廖瑞金，等. 数字孪生在电力装备领域中的应用与实现方法[J]. 高电压技术，2021，47(5)：1505-1521.
YANG Fan, WU Tao, LIAO Ruijin, et al. Application and implementation method of digital twin in electric equipment[J]. High Voltage Engineering, 2021, 47(5): 1505-1521.

[2] 刘云鹏，刘一瑾，律方成，等. 数字孪生技术在输变电设备中的应用前景与关键技术[J]. 高电压技术，2022，48(5)：1621-1633.
LIU Yunpeng, LIU Yijin, LÜ Fangcheng, et al. Application prospect and key technology of digital twin in power transmission and transformation equipment[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(5): 1621-1633.

[3] 刘亚东，陈 思，丛子涵，等. 电力装备行业数字孪生关键技术与应用展望[J]. 高电压技术，2021，47(5)：1539-1554.
LIU Yadong, CHEN Si, CONG Zihan, et al. Key technology and application prospect of digital twin in power equipment industry[J]. High Voltage Engineering, 2021, 47(5): 1539-1554.

[4] 陶 飞，张 贺，戚庆林，等. 数字孪生模型构建理论及应用[J]. 计算机集成制造系统，2021，27(1)：1-15.
TAO Fei, ZHANG He, QI Qinglin, et al. Theory of digital twin modeling and its application[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2021, 27(1): 1-15.

[5] 中国电力企业联合会科技开发服务中心. 电力行业数字孪生技术应用白皮书 2022[R/OL].[2022-07-02]. https：//www. thepaper. cn/newsDetail_forward_19289460.
Science and Technology Development Service Center of China Elec-

tric Power Enterprises Federation. White paper on application of digital twin technology in electric power industry[R/OL].[2022-07-02]. https: //www. thepaper. cn/newsDetail_forward_19289460.

[6] ANSYS. How to build reduced order models of computational fluid dynamics simulations[EB/OL]. [2019-05-15]. https://www.ansys.com/blog/how-to-build-reduced-order-model-cfd-simulations.

[7] JIANG G H, KANG M, CAI Z W, et al. Online reconstruction of 3D temperature field fused with POD-based reduced order approach and sparse sensor data[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2022, 175: 107489.

[8] PIERQUIN A, HENNERON T. Nonlinear data-driven model order reduction applied to circuit-field magnetic problem[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2021, 57(11): 7402509.

[9] FIC A, BIAŁECKI R A, KASSAB A J. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method[J]. Numerical Heat Transfer Part B Fundamentals, 2005, 48(2): 103-124.

[10] 胡金秀，郑保敬，高效伟. 基于特征正交分解降阶模型的瞬态热传导分析[J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2015，45(1)：014602.
HU Jinxiu, ZHENG Baojing, GAO Xiaowei. Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for transient heat conduction[J]. SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica, 2015, 45(1): 014602.

[11] 梁　钰，郑保敬，高效伟，等. 基于 POD 模型降阶法的非线性瞬态热传导分析[J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2018，48(12)：124603.
LIANG Yu, ZHENG Baojing, GAO Xiaowei, et al. Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for nonlinear transient heat conduction problems[J]. SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica, 2018, 48(12): 124603.

[12] 朱强华，杨　恺，梁　钰，等. 基于特征正交分解的一类瞬态非线性热传导问题的新型快速分析方法[J]. 力学学报，2020，52(1)：124-138.
ZHU Qianghua, YANG Kai, LIANG Yu, et al. A novel fast algorithm based on model order reduction for one class of transient nonlinear heat conduction problem[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(1): 124-138.

[13] 冯俞楷，杜小泽，杨立军. 非稳态导热基于温度梯度的本征正交分解降维方法[J]. 中国科学：技术科学，2018，48(1)：39-47.
FENG Yukai, DU Xiaoze, YANG Lijun. Extrapolating POD reduced-order model based on temperature gradient for unsteady heat conduction[J]. SCIENTIA SINICA Technologica, 2018, 48(1): 39-47.

[14] 刘　刚，靳艳娇，马永强，等. 基于混合法的油浸式变压器二维瞬态温度场仿真[J]. 高压电器，2019，55(4)：82-89.
LIU Gang, JIN Yanjiao, MA Yongqiang, et al. 2-D transient temperature field simulation of oil-immersed transformer based on hybrid method[J]. High Voltage Apparatus, 2019, 55(4): 82-89.

[15] 刘　刚，荣世昌，武卫革，等. 基于混合有限元法和降阶技术的油浸式变压器绕组 2 维瞬态流−热耦合场分析[J]. 高电压技术，2022，48(5)：1695-1704.
LIU Gang, RONG Shichang, WU Weige, et al. Two-dimensional transient flow-thermal coupling field analysis of oil-immersed trans-former windings based on hybrid finite element method and reduced-order technology[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(5): 1695-1704.

[16] 林　牧，刘　凯，王乃永，等. 换流变阀侧套管数字孪生建模及热特性分析[J]. 高电压技术，2022，48(5)：1653-1662.
LIN Mu, LIU Kai, WANG Naiyong, et al. Establishment of digital twin model of converter transformer valve-side bushing and analysis of its thermal characteristics[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(5): 1653-1662.

[17] 齐　波，张　鹏，张书琦，等. 数字孪生技术在输变电设备状态评估中的应用现状与发展展望[J]. 高电压技术，2021，47(5)：1522-1538.
QI Bo, ZHANG Peng, ZHANG Shuqi, et al. Application status and development prospects of digital twin technology in condition assessment of power transmission and transformation equipment[J]. High Voltage Engineering, 2021, 47(5): 1522-1538.

[18] 骆小满，阮江军，邓永清，等. 基于多物理场计算和模糊神经网络算法的变压器热点温度反演[J]. 高电压技术，2020，46(3)：860-866.
LUO Xiaoman, RUAN Jiangjun, DENG Yongqing, et al. Transformer hot-spot temperature inversion based on multi-physics calculation and fuzzy neural network algorithm[J]. High Voltage Engineering, 2020, 46(3): 860-866.

[19] 陈　彬，梁　旭，万妮娜，等. 中频变压器瞬态电磁场–温度场耦合求解分析[J]. 高电压技术，2020，46(12)：4400-4409.
CHEN Bin, LIANG Xu, WAN Nina, et al. Coupled transient electromagnetic-thermal fields analysis of medium-frequency transformer[J]. High Voltage Engineering, 2020, 46(12): 4400-4409.

[20] 陶文铨. 数值传热学[M]. 2 版. 西安：西安交通大学出版社，2001：90-94.
TAO Wenquan. Numerical heat transfer[M]. 2nd ed. Xi'an, China: Xi'an Jiaotong University Press, 2001: 90-94.

[21] WANG Y, YU B, CAO Z Z, et al. A comparative study of POD interpolation and POD projection methods for fast and accurate prediction of heat transfer problems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012, 55(17/18): 4827-4836.

[22] BIAŁECKI R A, KASSAB A J, FIC A. Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 62(6): 774-797.



荆澜涛
1985—，女，博士，副教授
主要从事输变电设备多物理场建模与计算、电气设备在线监测及故障诊断方面的研究工作
E-mail: letalaura@163.com

JING Lantao
Ph.D.
Associate professor



董雪情(通信作者)
1998—，女，硕士生
主要从事输变电设备多物理场建模与计算、电气设备在线监测及故障诊断方面的研究工作
E-mail: 390960660@qq.com

DONG Xueqing
Corresponding author

收稿日期　2022-05-09　修回日期　2022-09-15　　编辑　曾文君