引文格式：李华蓉,毕艾琳,辛 伟. 阈值动态调整的稳健平面拟合方法[J]. 地理空间信息, 2025, 23(9): 124-127. doi:10. 3969/j.issn. 1672-4623.2025.09.027

阈值动态调整的稳健平面拟合方法

李华蓉[1]，毕艾琳[1*]，辛　伟[1]
（1. 重庆交通大学 智慧城市学院，重庆 400074）

摘　要：激光点云数据存在很多异常离群点，随机抽样一致性算法可通过手动设置距离阈值剔除异常值，但距离阈值的选取十分考究。针对该问题，提出了基于阈值改进的稳健特征值法，根据样本点到拟合平面的距离标准差对距离阈值进行动态调整，同时通过内点数期望占比来评定每次算法迭代的效果，得到一组最优内点子集后通过特征值法对其进行平面拟合。分别与最小二乘法、特征值法、稳健特征值法进行对比实验，结果表明该方法对离群点的剔除效果明显，平面拟合精度较高，且大幅提升了内点占比的达标概率，从而间接提升了算法效率。

关键词：平面拟合；随机抽样一致性；特征值法；稳健特征值法
中图分类号：P231　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2025）09-0124-04

Robust Plane Fitting Method for Threshold Dynamic Adjustment

LI Huarong[1], BI Ailin[1], XIN Wei[1]
(1. School of Smart City, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Laser point cloud data often exist a lot of anomalous outliers, the RANSAC algorithm is able to manually set the distance threshold for the outliers to be eliminated, but the selection of distance threshold is very delicate. To address this problem, we proposed a robust eigenvalue method based on threshold improvement. The distance threshold was dynamically adjusted by the standard deviation of distance from the sample points to the fitting plane, while the expected percentage of number of interior points was utilized to evaluate the effect of each algorithm iteration. A subset of the optimal interior points was obtained and then fitted to the plane by the eigenvalue method. We used the least squares method, eigenvalue method, robust eigenvalue method to compare with the method in this paper. The results show that the improved plane fitting method is effective for the elimination of outliers, the plane fitting accuracy is relatively high, and the probability that the percentage of internal points reaches the standard is greatly improved, thus indirectly improving the efficiency of algorithm.

Key words: plane fitting, RANSAC, eigenvalue method, robust eigenvalue method

由于激光扫描得到的点呈离散状态，因此通过某种算法或方法将离散点拟合为线面成为激光三维扫描数据处理的必备过程[1]。线面拟合简化了点数据，提取了物体的线面特征，能被广泛应用于物体分割、场景重建、点云配准、自主导航和避障等领域，因此平面拟合方法研究尤为重要。常用的平面拟合方法包括最小二乘法[2-5]、特征值法[6-8]、稳健特征值法[9-10]等。点云数据在 X、Y、Z 轴都存在误差，而最小二乘法只能通过其中两个参数来推算另一个参数的最佳估值，忽略了另外两个方向的误差，导致平面拟合精度并不理想；特征值法可根据平面方程和约束条件，采用特征值解算法来计算平面模型参数，对 X、Y、Z 轴误差均有考虑，这两种方法只从纯数学的角度拟合所有点云数据，未考虑点云数据在采集过程中产生的异常值，而这些异常值将影响平面拟合精度[11]。为剔除异常值，部分学者[12-13]将随机抽样一致性算法（RANSAC）与特征值法相结合发展为稳健特征值法。然而，稳健特征值法对于距离阈值的选取十分考究，阈值过大则可能导致异常值被认定为内点参与平面拟合计算，阈值过小又会将内点当作异常值剔除[14]，且在不同情况下的距离阈值均需手动选择，算法缺少便捷性。鉴于此，本文提出了一种基于阈值改进的稳健平面拟合方法，根据所有样本点到拟合平面的距离标准差来动态调整距离阈值，从而有效规避阈值选取不当带来的不良后果，提高了点云数据处理的自动化程度。

项目来源：重庆市研究生联合培养基地建设项目（JDLHPYJD2020005）；重庆市自然科学基金面上项目（CSTB2023NSCQ-MSX0880）。
第一作者简介：李华蓉（1980—），博士，副教授，研究方向为时空数据可视分析、室内地图表达与大数据分析处理，E-mail：990020040625@cqjtu.edu.cn。
通信作者：毕艾琳（2001—），硕士，研究方向为三维激光点云分割与分类，E-mail：622230900029@mails.cqjtu.edu.cn。

1　基于阈值改进的稳健平面拟合方法

1.1　稳健平面拟合方法

稳健特征值法在国内最早由官云兰等[15]提出，其核心思想是先通过RANSAC算法对一组含有噪声的点云数据进行去噪处理，再利用特征值法对其进行平面拟合。RANSAC算法[16-20]将一组点云数据 Φ 中的异常值定义为外点，其余定义为内点，算法的目的是尽可能剔除外点而保留内点。首先，在总点云集 Ω 中随机提取最小样本子集（包含 n 个样本点，三维直线模型 $n=2$，样本点不重合；三维平面模型 $n=3$，样本点不共线），计算得到初始平面，即

$$P=ax+by+cz+d \tag{1}$$

然后，计算样本集中所有样本点到初始平面的欧氏距离 D_i，并与初始化的距离阈值 ε 进行比较，若 $D_i<\varepsilon$ 则该点为内点，反之为外点，并记录内点数 N。

$$D_i=\frac{\left|ax_i+by_i+cz_i+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{2}$$

设定点数阈值 t，若 $N\geqslant t$，则保留该内点子集；反之，则重复上述操作直至 $N\geqslant t$。

根据实际情况初始化迭代次数 M，比较每次迭代获取的 N，保留 N 最大的一组内点子集 $\varphi=\{(x_i, y_i, z_i),\ i=1,2,3,\cdots,N\}$。利用特征值法对点云 φ 进行平面拟合，假设待拟合的平面方程为 $ax+by+cz=d$，若要求得拟合平面，需在约束条件 $a^2+b^2+c^2=1$ 下满足式（3）取得最小值。

$$\sum_{i=1}^{N}d_i^2=\sum_{i=1}^{N}(ax_i+by_i+cz_i-d)^2 \tag{3}$$

式中，d_i 为任意点到该平面的距离。

采用拉格朗日乘数法构建目标函数，即

$$f=\sum_{i=1}^{N}d_i^2-\lambda(a^2+b^2+c^2-1) \tag{4}$$

对 d_i 求偏导并令其为零，则有：

$$\frac{\partial f}{\partial d}=2\sum_{i=1}^{N}\left|ax_i+by_i+cz_i-d\right|=0 \tag{5}$$

去掉绝对值变形得到：

$$d=(a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}) \tag{6}$$

式中，$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$；$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$；$\bar{z}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i$。

将式（6）代入式（3），再分别对 a、b、c 求偏导并令其为零，联立得到特征方程，即

$$\begin{bmatrix}\sum\Delta x_i\Delta x_i & \sum\Delta x_i\Delta y_i & \sum\Delta x_i\Delta z_i\\ \sum\Delta x_i\Delta y_i & \sum\Delta y_i\Delta y_i & \sum\Delta y_i\Delta z_i\\ \sum\Delta x_i\Delta z_i & \sum\Delta y_i\Delta z_i & \sum\Delta z_i\Delta z_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \tag{7}$$

式中，$\Delta x_i=x_i-\bar{x}$；$\Delta y_i=y_i-\bar{y}$；$\Delta z_i=z_i-\bar{z}$；$\lambda=\sum_{i=1}^{N}d_i^2$。

求得最小特征值对应的特征向量，得到最终参数 a、b、c，代入式（6）求得参数 d，得到最佳拟合平面方程。在处理大数据量模型时，M 直接影响算法的运行时长；ε 决定了算法对异常值的剔除能力。

1.2　基于阈值改进的稳健平面拟合方法

通过RANSAC算法得到的内点模型的可靠性可由内点占比直接体现，而内点占比是由 ε 决定的，通常内点占比达到80%，则认为该模型可靠。若想要每次迭代得到的模型尽可能可靠，ε 就不能固定不变。考虑到参数设置的限制，本文从动态距离阈值和期望占比两个方面来改进稳健特征值平面拟合算法。

1）动态距离阈值。在迭代过程中，将 ε 改进为随所有样本点到初始拟合平面的距离标准差 σ 的改变而改变。

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i-\overline{D}\right)^2}{n-1}} \tag{8}$$

$$\varepsilon=k\times\sigma \tag{9}$$

ε 应满足 $0<\varepsilon<D_{\max}$，其中 $D_{\max}$ 为点云集中两点之间的最大距离。通过实验调试可知，通常 $0<k\leqslant 3$。

2）期望占比（η）即内点数占点云总数的比值。相较于点数阈值，内点占比能更直观地体现内点模型的可靠性，可在迭代结束后对平面拟合结果进行质量评价。对于内点占比不达标的拟合结果，逐步调整 ε，直到得到满意的平面拟合结果为止。

基于阈值改进的稳健平面拟合方法流程见图1。

2　实验与结果分析

为验证改进的稳健平面拟合方法，本文采用模拟数据进行仿真对比实验。首先通过Matlab随机提取点云数据，并添加随机误差点和离群点，得到仅含随机误差的点云数据和含有离群点的随机误差点云数据；再基于Visual Studio 2019和PCL1.12.1，通过C++编程分别采用最小二乘法、特征值法、稳健特征值法和基于阈值改进的稳健特征值法对两组模拟数据进行平面拟合，得到平面参数 a、b、c、d 和 σ，并以 σ 为平面拟合精度的评定标准，σ 越小表示拟合效果越好，反之越差。

假设待拟合的空间平面方程为：$x+5y+3z=-5$，利用Matlab软件在该平面中随机采集1 000个点（图2a），提取点的 X、Y 坐标在[0,10]随机浮动。实地采集的点云数据中通常存在随机误差，为保证实验数据贴近实际，将1 000个采样点按照式（10）添加随机误差，作为第一组实验数据（图2b）。在仅含随机误差的情

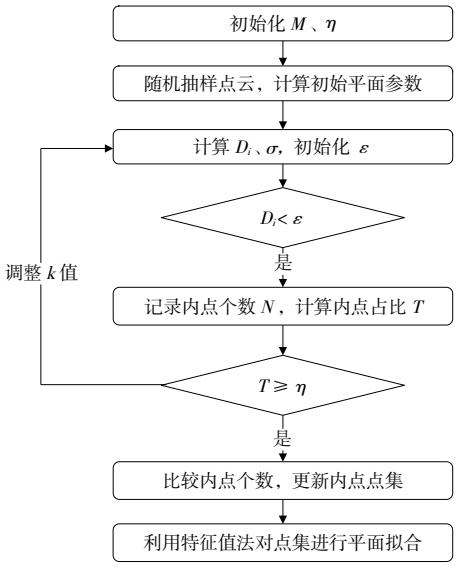
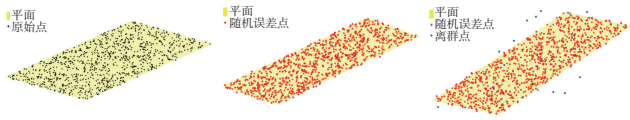


图1 改进的RANSAC算法流程图

况下，并不能明显体现RANSAC算法剔除异常值的优势，因此在第一组实验数据的基础上，添加了20个离群点作为第二组实验数据（图2c）。



a 1 000个采样点　b 仅含随机误差的点云　c 含离群点的随机误差点云

图2 实验选取点云

$$\begin{cases} x=x_i+x\mathrm{Sign}(x_i\mathrm{errorRang}) \\ y=y_i+y\mathrm{Sign}(y_i\mathrm{errorRang}) \\ z=z_i+z\mathrm{Sign}(z_i\mathrm{errorRang}) \end{cases} \tag{10}$$

式中，xSign、ySign、zSign 为误差的正负偏离方向；errorRang 为误差范围，本文取值0~0.2。

实验将 k 初始化为1，取值范围为(0,3]，初始化 η 为85%，迭代中若内点占比未达到85%，则通过调整 k 值使其达标，k 值调整步长为0.1。若 $k=3$ 仍未达标，则舍弃该次迭代，执行下一次迭代。以其中一次迭代为例，阈值动态调整过程见表1，可以看出，最初内点占比为54.5%，低于 η，但随着 k 值的增加，距离阈值逐渐扩大，内点占比也随之增加，当 $k=1.7$ 时，内点占比为85.9%，达到了 η，k 值停止调整。

表1 阈值动态调整

参数	阈值动态调整							
k 值	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
ε	0.524	0.576	0.629	0.681	0.733	0.786	0.838	0.890
内点占比/%	54.5	59.6	64.6	68.5	72.8	78.0	82.5	85.9
内点个数	556	608	659	699	743	796	842	876
外点个数	464	412	361	321	277	224	178	144

将稳健特征值法和改进的稳健特征值法的 M 均初始化为1 000次，经过1 000次迭代后，两种算法都会得到若干组达到点数阈值或期望占比要求的内点子集，从中选取最优子集。由于两种方法判定内点的方式不同，符合点数阈值要求的迭代次数也不同。迭代结果见表2，可以看出，在相同初始迭代次数下，稳健特征值法处理两组实验数据后得到的满足点数阈值要求的迭代次数占比分别为6.6%和4.2%，而基于阈值改进的稳健特征值法却达到了99.7%和99.8%，即1 000次迭代中997次和998次是满足点数阈值要求的，远高于稳健特征值法。假设要求达到点数阈值的迭代次数不少于100次，那么只需将初始迭代次数设置为200即可满足要求。由此可见，基于阈值改进的稳健特征值法能大幅提高每次迭代达标的概率，从而保留了更多的内点，进而通过减少初始迭代次数来提高计算效率。

表2 两种方法满足点数阈值要求的迭代次数对比

数据类型	参数	稳健特征值法	改进的稳健特征值法
随机误差点云	初始迭代次数	1 000	1 000
	满足点数阈值要求的迭代次数	66	997
含离群点的随机误差点云	初始迭代次数	1 000	1 000
	满足点数阈值要求的迭代次数	42	998

将输出平面参数以 $ax+by+cz+d=0$ 的形式表示，第一、二组实验数据的计算结果见表3、4，可以看出，在没有异常值影响的情况下，4种方法均能得到有效的拟合结果，由于最小二乘法只考虑到了一个方向的误差，其拟合精度比特征值法低27.68%，其他3种方法的拟合精度没有太大差异；相较于第一组实验数据，最小二乘法、特征值法的平面拟合精度分别下降了19.19%、30.01%，稳健特征值法和改进的稳健特征值法分别下降了0.03%、−0.49%，可忽略不计，由此可见，在异常值的影响下最小二乘法、特征值法由于没有剔除异常值的能力，平面拟合精度明显下降，稳健特征值法和改进的稳健特征值法能有效剔除异常值，且改进的稳健特征值法的拟合精度比稳健特征值法高1.54%，拟合效果更好。实验结果表明，基于阈值改进的稳健特征值法保证了算法的便捷性和可靠性，在含有离群点的情况下，能有效剔除异常值，获得理想的平面拟合效果。

表3　仅含有随机误差的平面拟合参数与精度

方法	a	b	c	d	σ	ε
最小二乘法	0.175 02	0.844 13	0.506 77	0.747 72	0.078 24	–
特征值法	0.168 04	0.845 48	0.506 88	0.842 88	0.061 28	–
稳健特征值法	0.162 91	0.846 57	0.506 73	0.857 01	0.062 45	0.17
改进的稳健特征值法	0.165 73	0.845 54	0.507 54	0.857 03	0.061 81	动态

表4　含有离群点和随机误差的平面拟合参数与精度

方法	a	b	c	d	σ	ε
最小二乘法	0.180 22	0.848 35	0.497 83	0.573 81	0.093 26	–
特征值法	0.173 50	0.846 90	0.502 60	0.753 71	0.079 67	–
稳健特征值法	0.172 38	0.844 62	0.506 86	0.820 42	0.062 47	0.17
改进的稳健特征值法	0.169 12	0.846 08	0.505 52	0.820 54	0.061 51	动态

3　结　论

本文提出的基于阈值改进的稳健特征值法通过 σ 自动改变 ε，大幅降低了算法去噪过度和去噪不充分的概率，提高了算法的自适应性；同时将点数阈值改进为 η，作为每次迭代评定内点模型可靠性的标准。本文分别以仅含随机误差的点云数据和含离群点的随机误差点云数据作为仿真实验的模拟数据，利用本文方法处理两组实验数据获得的平面拟合精度分别为0.061 81和0.061 51，并无明显差异，而最小二乘法、特征值法和稳健特征值法在添加异常值后的平面拟合精度均有不同程度的下降，且本文方法的平面拟合精度高于其他3种方法，说明本文方法去除异常点的效果明显，平面拟合精度较高。在 ε 改进方面，本文通过自动调整 k 值使得每次迭代尽可能地符合内点占比要求，这意味着得到相同数量符合内点占比要求的内点子集，该方法需要的迭代次数更少，相应的算法时长也更短，大幅提高了算法效率。

参考文献

[1] 王洋,王俊元,杜文华,等. 基于最小平方中值的点云平面拟合算法[J]. 激光与光电子学进展,2023,60(4):247-254

[2] 官云兰,刘绍堂,周世健,等. 基于整体最小二乘的稳健点云数据平面拟合[J]. 大地测量与地球动力学,2011,31(5):80-83

[3] 苍桂华,岳建平. 基于加权总体最小二乘法的点云平面拟合[J]. 激光技术,2014,38(3):307-310

[4] 孟庆年,郑德华,许烨璋. 基于补偿最小二乘的平面点云拟合方法[J]. 大地测量与地球动力学,2015,35(3):420-423

[5] 李明峰,欧江霞,檀丁,等. 加权总体最小二乘点云平面拟合定权方法探讨[J]. 大地测量与地球动力学,2015,35(3):428-432

[6] 薄怀志. 三种点云数据平面拟合方法的精度比较与分析[J]. 测绘与空间地理信息,2018,41(5):206-208

[7] 苏毅辉,陈志聪,吴丽君. 利用LMedS算法与特征值法的点云平面拟合方法[J]. 信息技术与网络安全,2022,41(3):38-43

[8] Nurunnabi A, Belton D, West G. Robust Statistical Approaches for Local Planar Surface Fitting in 3D Laser Scanning Data [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing,2014,96(10):106-122

[9] 杨军建,吴良才. 基于RANSAC算法的稳健点云平面拟合方法[J]. 北京测绘,2016(2):73-75

[10] 吴国强,俞家勇,马巍,等. 基于三维激光扫描的施工建筑平整度检测方法[J]. 激光与光电子学进展,2023,60(16):257-263

[11] 孔利,王延存,周茂伦,等. 基于随机抽样与特征值法的点云平面稳健拟合方法[J]. 测绘与空间地理信息,2019,42(3):43-46

[12] 周春霖,朱合华,李晓军. 随机抽样一致性平面拟合及其应用研究[J]. 计算机工程与应用,2011,47(7):177-179

[13] 王力,李广云,张启福,等. 激光扫描中平面拟合及坐标转换模型构建[J]. 测绘科学技术学报,2012,29(2):101-104

[14] 李孟迪,蒋胜平,王红平. 基于随机抽样一致性算法的稳健点云平面拟合方法[J]. 测绘科学,2015,40(1):102-106

[15] 官云兰,程效军,施贵刚. 一种稳健的点云数据平面拟合方法[J]. 同济大学学报(自然科学版),2008,36(7):981-984

[16] Fischler M A, Bolles R C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Application to Image Analysis and Automated Cartography [J]. Communications of the ACM,1981,24(6):381-395

[17] Gou J B, Wang G Q, Guan W, et al. A Feasible Region Detection Method for Vehicles in Unstructured Environments Based on PSMNet and Improved RANSAC[J]. Multimedia Tools and Applications,2023,82(28):43 967-43 989

[18] Shi C B, Wang G J, Pei X K, et al. Stereo Matching Using Local Plane Fitting in Confidence-based Support Window[J]. IEICE Transactions on Information and Systems, 2012, E95D(2):699-702

[19] 童子良,余学祥,汪涛,等. 一种新的鲁棒三维点云平面拟合方法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2020,43(12):1 684-1 688

[20] Li Z X, Shan J. RANSAC-based Multi Primitive Building Reconstruction from 3D Point Clouds[J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sending,2022,185:247-260