第 52 卷 第 7 期：3350-3361 高电压技术 Vol.52, No.7: 3350-3361
2026 年 7 月 31 日 High Voltage Engineering July 31, 2026
DOI: 10.13336/j.1003-6520.hve.20251272

基于 PGD 和等效复磁导率的高频变压器矩形利兹线损耗快速计算模型

钟立国，阎秀恪，任自艳，张殿海，张艳丽
（沈阳工业大学教育部特种电机与高压电器重点实验室，沈阳 110870）

摘　要：为实现矩形利兹线绕组高频变压器损耗的准确快速计算，该文提出一种基于本征广义分解(proper generalized decomposition, PGD)空间分离算法与等效复磁导率的损耗快速计算模型。首先，分别建立高频变压器内外窗双二维模型，针对铁芯窗口非对称截面的复杂边界约束，推导出不同边界条件下 PGD 空间分离算法的加权余量变分形式，进行磁场的双一维解耦计算。该方法通过交替方向迭代，将二维有限元计算降阶为双一维有限元计算，使计算复杂度从传统的 $O(N^2)$降至近线性的 $O(N)$。在保证鲁棒收敛的前提下，可达到百倍的加速比，实现磁场分布的高效计算。其次，由等效复磁导率模型来量化邻近效应损耗，结合趋肤效应构建完整的绕组损耗计算模型。最后，制作 2 种不同截面尺寸的矩形利兹线高频变压器样机进行实验，并对比二维有限元法、镜像法及所提 PGD 算法的计算效率与精度。结果表明，所提出的算法模型在保证精度的同时，计算速度较传统有限元和镜像法提升了 2 个数量级，为实现高频变压器的快速优化设计和在线实时监测提供了理论基础。

关键词：数字孪生；PGD 降阶技术；复磁导率；绕组损耗；利兹线

Fast Calculation Model of Rectangular Litz Line Loss of High Frequency Transformer Based on PGD and Equivalent Complex Permeability

ZHONG Liguo, YAN Xiuke, REN Ziyan, ZHANG Dianhai, ZHANG Yanli
(Key Laboratory of Special Motor and High-voltage Apparatus, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

Abstract：To achieve accurate and rapid calculation of high-frequency transformer losses in rectangular Litz wire windings, this paper proposes a fast loss calculation model integrating the proper generalized decomposition (PGD) spatial separation algorithm with an equivalent complex permeability model. Firstly, separate two-dimensional models for the inner and outer core windows are established. To address the complex boundary constraints of the asymmetric core window cross-section, the weighted residual variational form of the PGD spatial separation algorithm under different boundary conditions is derived, enabling dual one-dimensional decoupling of the magnetic field. This method, through alternating direction iteration, reduces the original two-dimensional finite element problem to a series of one-dimensional problems, thereby lowering the computational complexity from the traditional $O(N^2)$ to nearly $O(N)$. Under the premise of ensuring robust convergence, a speedup ratio of over 100 times can be achieved, realizing highly efficient magnetic field computation. Secondly, the proximity effect loss is quantified by using the equivalent complex permeability model, and , a complete winding loss calculation model is constructed in combination with an analytical formula for the skin effect. Finally, two high-frequency transformer prototypes employing rectangular Litz wires with different cross-sectional dimensions are fabricated and tested. The computational efficiency and accuracy of the proposed PGD algorithm are compared with those of the two-dimensional finite element method and the mirror method. Results demonstrate that the proposed model maintains high accuracy while improving calculation speed by two orders of magnitude compared to the traditional methods, providing a theoretical foundation for the rapid optimization design and online real-time monitoring of high-frequency transformers.

Key words：digital twins; PGD reduction technique; complex permeability; winding loss; Litz wire

基金资助项目：国家自然科学基金(52277015)。
Project supported by National Natural Science Foundation of China(52277015).

0 引言

全球能源清洁化、智能化转型推动智能电网与能源互联网深度融合数字孪生技术，以实现电力系统的全生命周期映射与优化。高频变压器以其小体积、高功率密度和快响应特性，成为新能源并网、中压直流配电、轨道交通和数据中心等前沿领域的关键装备[1-2]，其工作频率持续向中高频段提升。然而，频率的提升显著加剧了绕组涡流损耗。对关键物理状态的准确实时模拟是构建高保真高频变压器数字孪生体的核心挑战之一。绕组损耗计算的精度与效率，直接决定了数字孪生模型能否准确反映设备热-电行为，进而支撑设计优化、状态评估等应用。因此，发展高频变压器绕组损耗的快速准确计算方法，是突破其自身技术瓶颈并赋能数字孪生体实现闭环验证与智能决策的核心支撑。

目前，针对利兹绕组高频损耗的建模与计算方法主要可分为数值法、解析法及半解析法 3 类。数值法如有限元法(finite element method, FEM)[3-4]虽能高精度捕捉复杂磁场分布，但其计算资源消耗巨大，离散规模随模型复杂度呈指数增长，难以适用于参数化优化与实时分析。解析法如Dowell模型[5]、Ferreria 模型[6]和 Tourkhani 模型[7]等，都是基于一维磁场假设推导损耗表达式，计算效率高，但因忽略端部效应引起的横向磁场分量导致精度有限。为改善一维假设的不足，引入镜像法来处理高频变压器边界条件[8-11]，然而其在进行多层绕组内窗结构分析时，需引入多重镜像源，计算复杂度显著增加。半解析法虽在精度与效率间寻求平衡，但仍依赖数值计算环节，尚未彻底解决高效与高精度兼顾的问题[12]。

目前现有方法主要针对实心圆导线和圆形截面利兹线绕组，然而，在高频变压器设计中，为了提高填充系数、优化散热路径并满足紧凑型结构的需求，矩形利兹线及扁铜线绕组同样被广泛采用[13-14]。因此针对这类矩形截面，尤其是矩形利兹线的高频变压器绕组损耗计算，现有方法在计算精度与求解效率之间往往难以取得理想平衡，亟待发展更高效且精确的计算策略以突破这一关键技术瓶颈。

近年来，模型降阶(model order reduction, MOR)技术在计算科学与工程领域展现出巨大潜力[15]，其核心目标是通过数学变换将高维复杂系统的控制方程投影到显著降低的维度空间，从而在保持关键系统特征的前提下实现计算效率的飞跃。本征广义分解(proper generalized decomposition, PGD)算法[16-17]作为新一代 MOR 的代表性方法，已成功应用于流体力学[18]、固体力学及多物理场耦合等复杂系统的实时或快速仿真[19]。其独特优势在于无需传统 MOR 所需的先验快照(snapshot)数据或离线训练阶段，而是直接在参数空间(如几何参数、物理参数、频率等)构建分离变量表示的解形式，特别适合于参数化研究与优化设计。在电磁计算领域，已经实现应用 PGD 空间分离策略快速分析电机槽内导体的电流分布[20]与矩形导体的高频电感[21]，以及应用时空分离进行电磁传感器电磁场模拟[22]、变压器和电感器的仿真[23-24]。尽管 PGD 在电磁计算中已有初步应用，但现有研究中仍未见针对高频变压器矩形利兹线中涡流与邻近效应的多尺度耦合问题；仅限于单一物理场或简单边界的传统范式，缺乏针对变压器铁芯窗口施加不同边界条件的高效场解耦推导计算；针对时空分离计算电气设备应用仍受限于空间离散网格数量，无法满足数字孪生对损耗实时计算的需求。

因此，为实现高频变压器矩形利兹线绕组损耗的高精度与高效率协同计算，本文提出了一种基于 PGD 空间分离算法和等效复磁导率的联合模型。分别建立了高频变压器内外窗的二维模型，并考虑了不同的边界条件。推导出 PGD 空间分离算法数学模型，将磁芯窗口的二维磁场问题解耦为 2 个一维子问题，实现磁场强度的高效计算，将计算所得磁场强度代入等效复磁导率模型，量化邻近效应损耗，并结合趋肤效应解析公式，构建完整的损耗模型。为验证所提模型的准确性与工程实用性，设计并制备了 2 组具有不同截面尺寸和匝数的利兹线绕组高频变压器实验样机。利用高精度阻抗分析仪，在宽频带范围内对样机的端口阻抗参数进行了测量。实验数据表明，本文提出的模型在保证高精度的同时，计算速度较传统 FEM 和镜像法提升了 2 个数量级，为高频变压器的快速优化设计和数字孪生所需的在线实时监测提供了强大而实用的理论工具。

1 双二维模型的 PGD 空间分离策略

准确提取导线外部磁场是利兹线绕组损耗计算的核心挑战之一。无论是基于一维假设的 Dowell 模型、Tourkhani 模型，还是采用均质化思想的等效

复磁导率模型，其精度均高度依赖于外磁场强度的准确获取。为准确表征铁芯上下轭对绕组端部磁场分布的影响，现有方法通常将磁芯窗口区域划分为内窗(inner window, IW)和外窗(outer window, OW) 2个独立的二维子域模型[9]，如图 1 所示，并借助镜像法计算外磁场。该方法通过引入虚拟电流源来满足铁芯边界条件，不仅避免了传统一维模型忽略绕组端部效应而带来的误差，还避免了有限元等数值算法的耗时性，然而，在计算内窗(IW)区域时，镜像法的计算效率显著受限于所需镜像层数及离散网格的精细程度。为突破此瓶颈，本文提出应用 PGD 算法，分别对 IW 和 OW 区域的磁场进行高效求解。

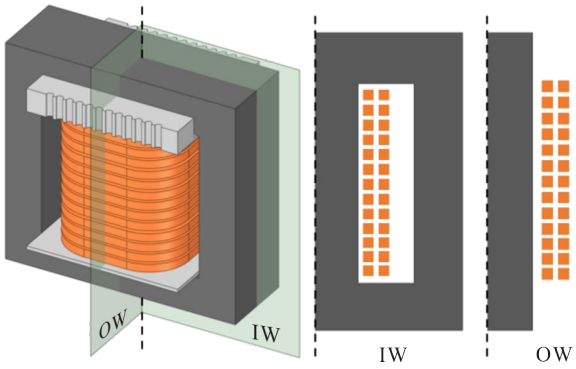


图 1　高频变压器铁芯窗口内外截面

Fig.1　Sectional view of the core window of the high-frequency transformer

对于高频变压器绕组的 IW 和 OW 区域，二维平面矢量磁位 A(本文中的矢量均为标量分量)满足以下偏微分方程：

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-J(x,y) \tag{1}$$

式中：μ 为磁导率；$J(x,y)$为电流密度矢量；x、y 分别为二维平面内的横、纵坐标。

对于高频变压器外窗，考虑边界条件：

$$\begin{cases} A_{(x=L,y)}=0, \quad A_{(x,y=0)}=0 \\ A_{(x,y=H)}=0, \quad \left.\dfrac{\partial A}{\partial x}\right|_{x=0,y}=q \end{cases} \tag{2}$$

式中：L 和 H 分别为窗口求解域的长度和宽度；q 为边界磁通密度法向分量；对于试函数 A^*，其加权余量形式为：

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_x\times\Omega_y}\left(\frac{\partial A^*}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A^*}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y= \\ &-\int_{\Omega_x\times\Omega_y}A^*\mu_0 J\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}A^*(x=0,y)q\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{3}$$

式中：Ω_x 和 Ω_y 分别为求解域在 x 和 y 方向上的一维子域；μ_0 为真空磁导率。

采用 PGD 算法对 A 进行空间分离，分离形式的近似解为：

$$A(x,y)=\sum_{j=1}^{n}X_j(x)Y_j(y) \tag{4}$$

式中：$X_j(x)$和 $Y_j(y)$分别为第 j 项中沿 x 和 y 方向的待求一维基函数。对于迭代步骤 n，假设前 $n-1$ 项的和函数已知，计算下一项 $X_n(x)Y_n(y)$时，PGD 的近似解为：

$$\begin{aligned} A^n(x,y)&=A^{n-1}(x,y)+X_n(x)Y_n(y)= \\ &\sum_{j=1}^{n-1}X_j(x)Y_j(y)+X_n(x)Y_n(y) \end{aligned} \tag{5}$$

函数 $X_n(x)$ 和 $Y_n(y)$ 在当前都是未知的，并以乘积的形式出现，本文使用交替方向策略的内层迭代来分别求解 $X_n(x)$ 和 $Y_n(y)$。指定一个任意的初始猜测 $Y_n^0(y)$ 来开始迭代过程，由 $Y_n^0(y)$ 计算 $X_n^1(x)$，再由 $X_n^1(x)$ 计算 $Y_n^1(y)$，依此交替计算，即从 $Y_n^{t-1}(y)$ 计算 $X_n^t(x)$，再由 $X_n^t(x)$ 计算 $Y_n^t(y)$，直到满足收敛准则，此时 $X_n(x)=X_n^t(x)$、$Y_n(y)=Y_n^t(y)$，内层迭代结束，其中 t 为第 t 次内层迭代。计算得到 $A_n(x,y)$，进入外层迭代收敛准则的判断。

第 t 次内层迭代获得的 PGD 近似解为：

$$A^{n,t}(x,y)=A^{n-1}(x,y)+X_n^t(x)Y_n^t(y) \tag{6}$$

交替方向迭代方案的每次计算包括以下 2 个步骤：

(1)由 $Y_n^{t-1}(y)$ 计算 $X_n^t(x)$，矢量磁位 $A(x,y)$的近似值为：

$$A^{n,t}(x,y)=\sum_{j=1}^{n-1}X_j(x)Y_j(y)+X_n^t(x)Y_n^{t-1}(y) \tag{7}$$

则式(7)中仅有 $X_n^t(x)$ 未知。此时，权函数 A^* 为：

$$A^*(x,y)=X_n^*(x)Y_n^{t-1}(y) \tag{8}$$

通过伽辽金加权余量形式。将式(7)、(8)代入式(3)，得到：

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_x\times\Omega_y}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\left(Y_n^{t-1}\right)^2+X_n^*X_n^t\left(\frac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}}{\mathrm{d}y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y= \\ &-\int_{\Omega_x\times\Omega_y}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}x}Y_n^{t-1}Y_j+X_n^*X_j\frac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y- \\ &\int_{\Omega_x\times\Omega_y}X_n^*Y_n^{t-1}J(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}X_n^*(x=0)Y_n^{t-1}q\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9}$$

在计算过程中，电流密度向量 $J(x,y)$同样需

要在空间上进行拆分。由于绕组的截面为矩形，根据坐标系可将其分解为沿 x、y 方向的一维函数积，如图 2 所示。该分离形式可表示为：

$$J(x,y)=J(x)J(y) \tag{10}$$

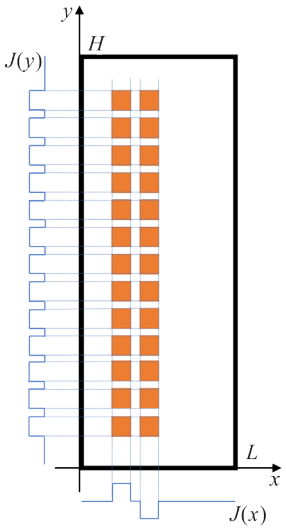


图 2　二维截面电流密度分离表示

Fig.2　Two-dimensional cross-sectional current density separation representation

将式(10)代入式(9)中，则关于 y 的所有函数都是已知的，可以计算相应的一维积分：

$$\begin{cases}\alpha^x=\int_{\Omega_y}\left(Y_n^{t-1}(y)\right)^2\mathrm{d}y, \quad \beta^x=\int_{\Omega_y}\left(\dfrac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right)^2\mathrm{d}y\\ \gamma_j^x=\int_{\Omega_y}Y_n^{t-1}(y)Y_j(y)\mathrm{d}y,\ \delta_j^x=\int_{\Omega_y}\dfrac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}(y)}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}Y_j(y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\\ \xi^x=\int_{\Omega_y}Y_n^{t-1}(y)J(y)\mathrm{d}y,\ \mu^x=\int_{\Omega_y}Y_n^{t-1}(y)q\mathrm{d}y\end{cases} \tag{11}$$

将式(11)代入式(9)中，此时式(9)为空间 x 变量问题的加权残差形式，最终计算式为：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_x}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\alpha^x+X_n^*X_n^t\beta^x\right)\mathrm{d}x=\\ &-\int_{\Omega_x}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}x}\gamma_j^x+X_n^*X_j\delta_j^x\right)\mathrm{d}x-\\ &\int_{\Omega_x}X_n^*\xi^xJ(x)\mathrm{d}x+X_n^*(x=0)\mu^x\end{aligned} \tag{12}$$

通过求解式(12)可得 $X_n^t(x)$。

(2)再由 $X_n^t(x)$ 计算 $Y_n^t(x)$，矢量磁位 $A(x,y)$的近似值为：

$$A^{n,t}(x,y)=\sum_{j=1}^{n-1}X_j(x)Y_j(y)+X_n^t(x)Y_n^t(y) \tag{13}$$

其中，只有 $Y_n^t(x)$ 是未知的，权函数 A^* 为：

$$A^*(x,y)=X_n^t(x)Y_n^*(y) \tag{14}$$

同样有：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_x\Omega_y}\left(\left(\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\right)^2Y_n^*Y_n^t+\left(X_n^t\right)^2\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_n^t}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\ &-\int_{\Omega_x\Omega_y}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}x}Y_n^*Y_j+X_n^tX_j\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &-\int_{\Omega_x\Omega_y}X_n^tY_n^*J(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}X_n^t(x=0)Y_n^*q\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{15}$$

其中，所有关于 x 的函数均已知。对值域 Ω_x 进行积分可得：

$$\begin{cases}\alpha^y=\int_{\Omega_x}\left(X_n^t(x)\right)^2\mathrm{d}x, \quad \beta^y=\int_{\Omega_x}\left(\dfrac{\mathrm{d}X_n^t(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\\ \gamma_j^y=\int_{\Omega_x}X_n^t(x)X_j(x)\mathrm{d}x,\ \delta_j^y=\int_{\Omega_x}\dfrac{\mathrm{d}X_n^t(x)}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}X_j(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\ \xi^y=\int_{\Omega_x}X_n^t(x)J(x)\mathrm{d}x,\ \mu^y=\int_{\Omega_x}X_n^t(x=0)q\mathrm{d}x\end{cases} \tag{16}$$

进而得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_y}\left(\beta^yY_n^*Y_n^t+\alpha^y\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_n^t}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y=\\ &-\int_{\Omega_y}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\delta_j^yY_n^*Y_j+\gamma_j^y\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y-\\ &\int_{\Omega_y}\xi^yY_n^*J(y)\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}Y_n^*\mu^y\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{17}$$

通过求解方程可得 $Y_n^t(y)$。针对高频变压器内窗，考虑边界条件：

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial A}{\partial x}\right|_{x=0,y}=q,\ \left.\dfrac{\partial A}{\partial y}\right|_{x,y=0}=q\\ \left.\dfrac{\partial A}{\partial x}\right|_{x=L,y}=q,\ \left.\dfrac{\partial A}{\partial y}\right|_{x,y=H}=q\end{cases} \tag{18}$$

对求解域使用上述边界条件，即 4 条边均为 Neumann 边界条件：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_x\times\Omega_y}\left(\frac{\partial A^*}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A^*}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\ &-\int_{\Omega_x\times\Omega_y}A^*\mu_0J(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\ &\int_{\Omega_y}A^*(x=0,y)q\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}A^*(x=L,y)q\mathrm{d}y+\\ &\int_{\Omega_x}A^*(x,y=0)q\mathrm{d}y+\int_{\Omega_x}A^*(x,y=H)q\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{19}$$

与上文推导过程相同，第 t 次内层迭代获得的 PGD 近似解 $A^{n,t}$ 如下文所述。

(1)由 $Y_n^{t-1}(y)$ 计算 $X_n^t(x)$，将式(7)、(8)代入式(19)，得到：

$$\int_{\Omega_x\times\Omega_y}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\left(Y_n^{t-1}\right)^2+X_n^*X_n^t\left(\frac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}}{\mathrm{d}y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$-\int_{\Omega_x\times\Omega_y}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}x}Y_n^{t-1}Y_j+X_n^*X_j\frac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\int_{\Omega_x\times\Omega_y}X_n^*Y_n^{t-1}J(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}X_n^*(x=0)Y_n^{t-1}q\mathrm{d}y+$$
$$\int_{\Omega_y}X_n^*(x=L)Y_n^{t-1}q\mathrm{d}y+\int_{\Omega_x}X_n^*Y_n^{t-1}(y=0)q\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\Omega_x}X_n^*Y_n^{t-1}(y=H)q\mathrm{d}x \tag{20}$$

在式(20)中，关于 y 的所有函数都是已知的，可以计算相应的一维积分：

$$\begin{cases}\alpha^x=\int_{\Omega_y}\left(Y_n^{t-1}(y)\right)^2\mathrm{d}y,\quad \beta^x=\int_{\Omega_y}\left(\frac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right)^2\mathrm{d}y\\ \gamma_j^x=\int_{\Omega_y}Y_n^{t-1}(y)Y_j(y)\mathrm{d}y,\ \delta_j^x=\int_{\Omega_y}\frac{\mathrm{d}Y_n^{t-1}(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_j(y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\\ \xi^x=\int_{\Omega_y}Y_n^{t-1}(y)J(y)\mathrm{d}y,\ \mu^x=\int_{\Omega_y}Y_n^{t-1}(y)q\mathrm{d}y\\ \nu^x=\int_{\Omega_x}(Y_n^{t-1}(y=0)q+Y_n^{t-1}(y=H)q)\mathrm{d}x\end{cases} \tag{21}$$

最终计算式为：

$$\int_{\Omega_x}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\alpha^x+X_n^*X_n^t\beta^x\right)\mathrm{d}x=$$
$$-\int_{\Omega_x}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}x}\gamma_j^x+X_n^*X_j\delta_j^x\right)\mathrm{d}x- \tag{22}$$
$$\int_{\Omega_x}X_n^*\xi^xJ(x)\mathrm{d}x+\int_{\Omega_x}X_n^*\nu^x\mathrm{d}x+$$
$$X_n^*(x=0)\mu^x+X_n^*(x=L)\mu^x$$

通过求解式(22)可得 $X_n^t(x)$。

(2)再由 $X_n^t(x)$ 计算 $Y_n^t(x)$，将式(13)、(14)代入式(19)，得到：

$$\int_{\Omega_x\Omega_y}\left(\left(\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\right)^2Y_n^*Y_n^t+\left(X_n^t\right)^2\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_n^t}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$-\int_{\Omega_x\Omega_y}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}x}Y_n^*Y_j+X_n^tX_j\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\int_{\Omega_x\Omega_y}X_n^tY_n^*J(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}X_n^t(x=0)Y_n^*q\mathrm{d}y+$$
$$\int_{\Omega_y}X_n^t(x=L)Y_n^*q\mathrm{d}y+\int_{\Omega_x}X_n^tY_n^*(y=0)q\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\Omega_x}X_n^tY_n^*(y=H)q\mathrm{d}x \tag{23}$$

其中，所有关于 x 的函数均已知。对值域 Ω_x 进行积分可得：

$$\begin{cases}\alpha^y=\int_{\Omega_x}\left(X_n^t(x)\right)^2\mathrm{d}x,\quad \beta^y=\int_{\Omega_x}\left(\frac{\mathrm{d}X_n^t(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\\ \gamma_j^y=\int_{\Omega_x}X_n^t(x)X_j(x)\mathrm{d}x,\delta_j^y=\int_{\Omega_x}\frac{\mathrm{d}X_n^t(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}X_j(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\ \xi^y=\int_{\Omega_x}X_n^t(x)J(x)\mathrm{d}x,\ \mu^y=\int_{\Omega_x}X_n^tq\mathrm{d}x\\ \nu^y=\int_{\Omega_y}X_n^t(x=0)q+X_n^t(x=L)q\mathrm{d}y\end{cases} \tag{24}$$

最终计算式为：

$$\int_{\Omega_y}\left(\beta^yY_n^*Y_n^t+\alpha^y\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_n^t}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y=$$
$$-\int_{\Omega_y}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\delta_j^yY_n^*Y_j+\gamma_j^y\frac{\mathrm{d}Y_n^*}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y- \tag{25}$$
$$\int_{\Omega_y}\xi^yY_n^*J(y)\mathrm{d}y+\int_{\Omega_y}Y_n^*\nu^y\mathrm{d}y+$$
$$Y_n^*(y=0)\mu^y+Y_n^*(y=H)\mu^y$$

通过求解方程可得 $Y_n^t(y)$。

交替迭代外窗式(12)、式(17)以及内窗式式(22)、式(25)，其收敛判据定义见式(26)，直到满足收敛准则 $\delta(n)<\varepsilon$，其中 $\delta(n)$为第 n 次外层迭代的误差范数，ε 为预设的收敛容差。

$$\delta(n)=\frac{\|X_n^t(x)Y_n^t(y)-X_n^{t-1}(x)Y_n^{t-1}(y)\|}{\|X_n^{t-1}(x)Y_n^{t-1}(y)\|}<\varepsilon \tag{26}$$

由 $X(x)$和 $Y(y)$得到近似解 $A(x,y)$，判断误差算子 $\varepsilon(n)$小于指定容差，当 $\varepsilon(n)<\tilde{\varepsilon}$ 时迭代停止，其中 $\varepsilon(n)$为第 n 次外层迭代的相对误差范数，$\tilde{\varepsilon}$ 为预设的收敛容差。则外层迭代的误差定义为：

$$\varepsilon(n)=\frac{\|X_n(x)Y_n(y)\|}{\|X_1(x)Y_1(y)\|} \tag{27}$$

PGD 空间分离的计算过程如图 3 所示。对 A 进行计算，得到磁场强度 H_{IW} 和 H_{OW}。该结果将直接应用于等效复磁导率模型的损耗计算，实现邻近效应损耗的快速量化。

2 高频利兹线损耗计算

利兹线的损耗分为 2 部分：电阻损耗(直流损耗)和涡流损耗(交流损耗)。其中涡流损耗可进一步分为趋肤效应损耗和邻近效应损耗。

在计算邻近效应损耗时，通常引入邻近损耗因子 G。单位长度损耗可表示为：

$$P_{\mathrm{prox}}=GH_{\mathrm{m}}^2 \tag{28}$$

式中：H_{m} 为正弦变化磁场强度的有效值。

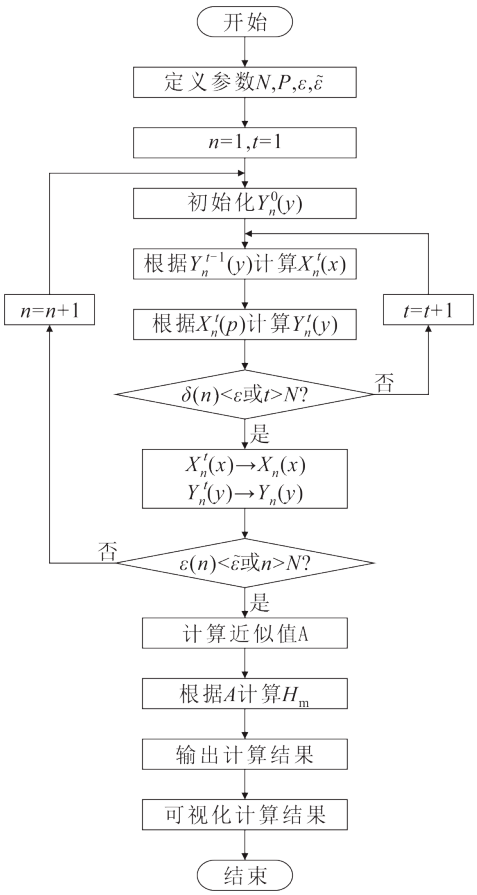


图 3 PGD 算法流程图

Fig.3 PGD method flow chart

为了建立邻近效应模型，假设圆形导体处于均匀的外谐波磁场中。由邻近效应产生的涡流激发的矢量磁势满足二维泊松方程。通过求解该方程，分析导体内外电磁场分布，进一步计算出导体的磁化强度。利用导体的磁化强度和静态极限下的磁化强度相等的假设，最终推导出孤立圆形导体复磁导率的表达式[25]，即：

$$\dot{\mu}_{\mathrm{r}}=\mu_{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{J}_1(z)}{z\mathrm{J}_1'(z)},\quad z=r_{\mathrm{s}}\frac{1-\mathrm{j}}{\delta} \tag{29}$$

式中：μ_{r} 为铜线的相对导磁率；$\mathrm{J}_1'(z)$ 为 1 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_1(z)$ 的导数；r_{s} 为股线半径；j 为虚数单位；δ 为趋肤深度；利兹线可以看作是由空气和大量铜线组成的复合导体，其均匀相对复磁导率可由 Ollendorff 公式[26]计算得到：

$$\mu=\mu_0\left(1+\frac{2\eta(\dot{\mu}_{\mathrm{r}}-1)}{2+(1-\eta)(\dot{\mu}_{\mathrm{r}}-1)}\right) \tag{30}$$

式中：η 为单根利兹线的填充因子，由单股利兹线的面积和股数的乘积除以整个利兹线的横截面积得到。相对复磁导率的实部表征了存储在利兹线中的磁场能量随频率变化，虚部与利兹线的邻近效应有关。

当线径为 0.1 mm 时，复磁导率实部和虚部相对于不同填充系数随频率的变化趋势如图 4 所示。随着频率的增加，利兹线磁场能量逐渐衰减，而与邻近效应相关的部分逐渐增大。填充系数越大，变化越显著。

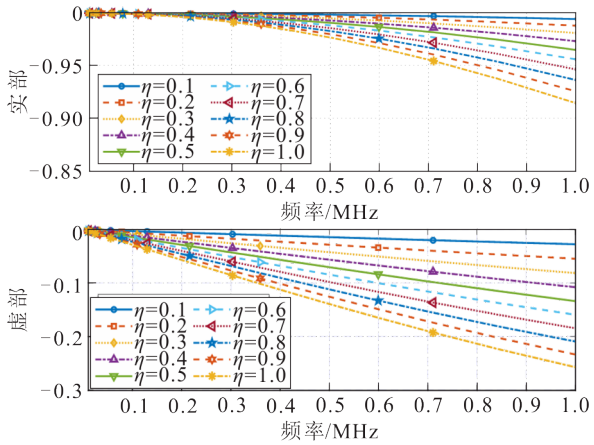


图 4 相对复磁导率随频率的变化趋势

Fig.4 Variation trend of relative complex permeability with frequency

利用 PGD 空间分离策略计算磁场强度分布后，提取二维静磁场坐标系中的磁场值，利用复磁导率表征导体的邻近效应。给出了复磁导率虚部与相邻效应损耗的关系：

$$P_{\mathrm{prox}}=\pi f\mu''\int_{\Omega_{\mathrm{c}}}|H_{\mathrm{m}}|^2\mathrm{d}V \tag{31}$$

式中：f 为工作频率；μ'' 为复磁导率的虚部；Ω_{c} 为利兹线的横截面积；V 为导线体积(在二维模型中取单位长度)。

最终的双二维邻近损耗可表示为：

$$P_{\mathrm{prox}}=\pi f\mu''\left(l_{\mathrm{IW}}\int_{\Omega_{\mathrm{c}}}|H_{\mathrm{m}}|^2\mathrm{d}V+l_{\mathrm{OW}}\int_{\Omega_{\mathrm{c}}}|H_{\mathrm{m}}|^2\mathrm{d}V\right) \tag{32}$$

式中：l_{IW}、l_{OW} 分别为内、外芯窗的等效长度，如图 5 所示。

基于利兹线多股绝缘导体的并联结构特点，其趋肤效应损耗可以看作是各股独立损耗[27]的线性叠加。因此，单位长度的损耗可表示为：

$$P_{\mathrm{skin}}=nR_{\mathrm{s}}\frac{z\mathrm{J}_0(z)}{4\mathrm{J}_1(z)}\left(\frac{I_{\mathrm{w}}}{n}\right)^2=\frac{\rho}{n\pi r_{\mathrm{s}}^2}\frac{z\mathrm{J}_0(z)}{4\mathrm{J}_1(z)}I_{\mathrm{w}}^2 \tag{33}$$

式中：J_0 和 J_1 分别为 0 阶和 1 阶贝塞尔函数；R_{s} 为单位导线长度的直流电阻；I_{w} 为交流电流的均方根值。

最后，高频变压器利兹导线的总损耗为趋肤效应损耗和邻近效应损耗之和：

$$P = P_{\text{skin}} + P_{\text{prox}} \tag{34}$$

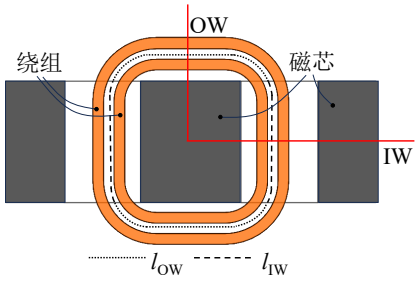


图 5 壳式变压器俯视图

Fig.5 Top view of shell transformer

3 算法的验证与应用

3.1 精度验证

为验证本文所提出的矩形利兹线绕组高频损耗计算模型的准确性与适用性，选用 2 种不同结构参数的矩形利兹线高频变压器样机(样机I和样机II)进行实验验证(实验样机及具体结构参数详见附录A)。磁芯材料均采用高频特性良好的铁氧体，型号分别为 EE70B 和 EE85A。

在计算方面，分别采用本文所提 PGD 方法、传统镜像法以及二维有限元法(2D-FEM)对 2 款样机进行建模与计算。实验测量采用 TH2836 高精度阻抗分析仪搭建测试平台(实验平台详见附录 A)，该设备可在 10 kHz~1 MHz 宽频范围内精确测量绕组阻抗参数。为排除磁芯损耗对绕组电阻提取的干扰，实验中将二次侧绕组短路，确保所测交流电阻仅反映绕组在高频条件下的涡流与邻近效应损耗。

图 6 展示了 3 种计算方法所得交流电阻与实验测量值的对比结果。为评估实验数据的可靠性与重复性，对同一变压器样机在各频率点均进行了多次重复测量，并在图 6 中以均值±标准差形式的误差棒表示。如图 6 所示，各频率点处的实验数据误差棒较短，表明测量值离散度较小，结果具有良好的一致性与可重复性，为后续对比分析提供了可靠的数据基础。

从频率特性来看，在低于 10 kHz 的频段内，利兹线单股直径远小于趋肤深度，趋肤效应影响可忽略，交流电阻与直流电阻基本一致；当频率处于 10 kHz~100 kHz 范围内时，导体趋肤深度逐渐减小，趋肤效应及内部邻近效应开始显现，交流电阻缓慢上升；而当频率进一步升高至 100 kHz～1 MHz 时，外磁场引起的邻近效应显著增强，损耗占比迅速提高，交流电阻呈现急剧增加趋势。

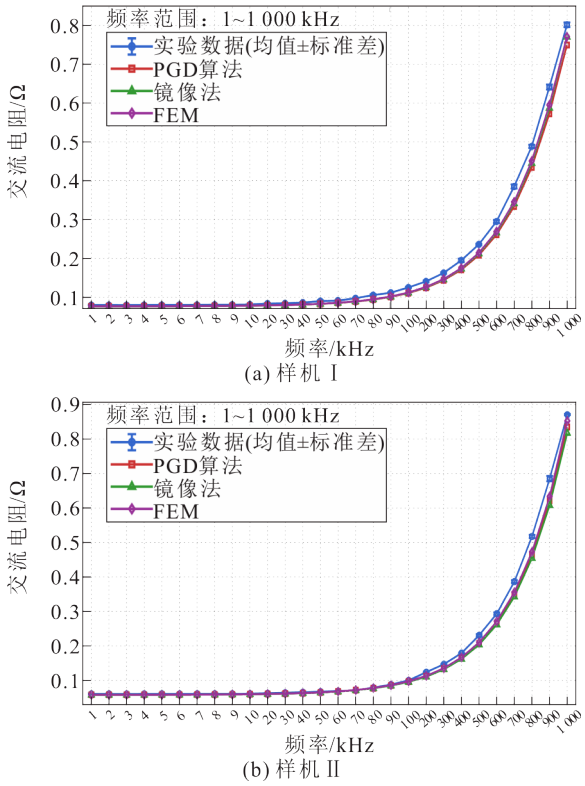


图 6 样机实验结果对比

Fig.6 Comparison of prototype test results

在整个测试频段内，PGD 方法、镜像法与 FEM 的计算结果与实验值变化趋势一致。误差分析结果表明，基于 PGD 方法计算的绕组交流电阻最大值与实测结果相比，样机I和样机II的相对误差分别不超过 9.8%和 8.7%，满足工程实际应用的精度需求，证明了本文所提模型的有效性与实用性。

3.2 计算效率对比

为定量评估本文提出的 PGD 降阶算法在计算效率上的优势，与 2D-FEM 和镜像法进行了对比。程序的运行环境为 2.9 GHz 英特尔酷睿 i5-10400F 处理器和 16 GB 内存。分别求解不同网格数量下的磁场分布，考察算法在不同计算规模下的计算效率。在相同收敛精度条件下，对以下 3 类方法进行对比分析：

1）传统有限元法(FEM)：基于 ANSYS Maxwell 2021 R1 构建二维静磁场模型。

2）镜像法(method of images)：基于 Visual studio 2022 编程实现，镜像层数设置为 2 层，计算过程见附录 B[28]。

3）本文 PGD 算法：基于 MATLAB 2019a 实现，

采用空间分离策略解耦二维磁场方程。

在 PGD 迭代计算过程中，为验证 PGD 算法对初始猜测的鲁棒性及收敛稳定性，每次初始 $Y_n^0(y)$ 均采用随机生成的函数作为初始猜测。结果表明：即便初始值随机变化，内层迭代仍表现出良好的稳定性，除第 1 步迭代外其余仅需 2 步即可收敛至 1×10^{-8} 的精度，如图 7 所示。同时，在沿 x 和 y 轴采用不同一维网格划分的情况下，外层迭代次数 N 均保持在较低水平($N\leq100$)，收敛过程如图 8 所示。该结果充分证明了算法对不同初始猜测和网格密度均具有良好的适应性与稳定性，进一步增强了方法的可靠性。

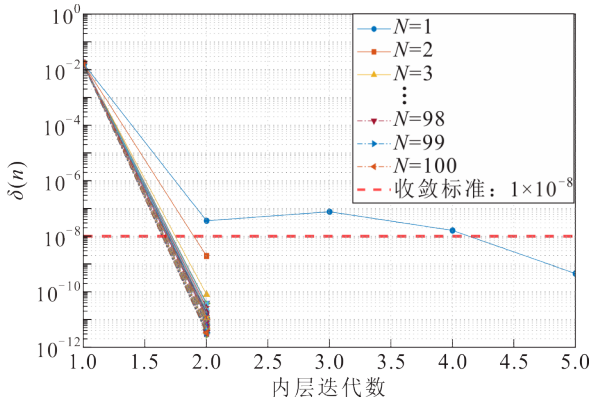


图 7 PGD 算法内层迭代收敛图

Fig.7 Convergence diagram of inner iteration in PGD algorithm

采用 3 种方法计算得到的变压器内/外窗区域磁场分布如图 9 所示，PGD 算法的结果与镜像法和二维有限元法(FEM)基本一致，验证了其计算精度。图 10 比较了 3 种方法在不同网格密度下的计算时间，由于 FEM 与镜像法耗时从数十秒至上千秒不等，而 PGD 仅需 0.23~4.52 s，因此采用对数坐标展示。进一步根据计算时间数据得出 PGD 的加速比，如图 11 所示。

PGD 在保持与 FEM 和镜像法精度一致的前提下，计算效率显著提升，其平均耗时仅为二维 FEM 的 0.47%，加速比达百倍以上，且随网格加密持续增大。PGD 耗时平均降至镜像法的 1.46%。该效率优势源于 PGD 对高维场的本质解耦，通过将二维磁场方程分解为低维子问题迭代序列，内层 2 步收敛至 1×10^{-10}，外层收敛稳健，从而将计算复杂度从 $O(N^2)$降至近线性，避免了维度灾难，实现了精度与效率的统一。

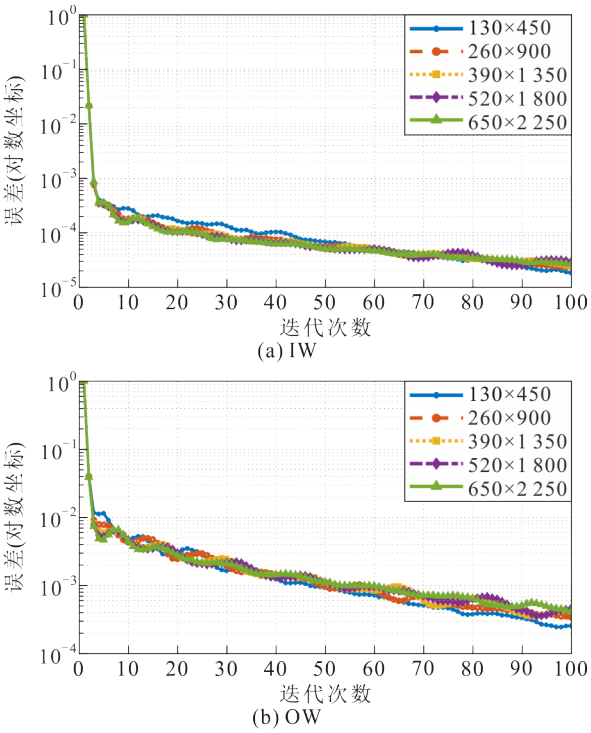


图 8 PGD 算法在不同网格划分($N_x\times N_y$)下的迭代收敛图

Fig.8 Convergence graph of PGD algorithm iteration under different mesh divisions ($N_x\times N_y$)

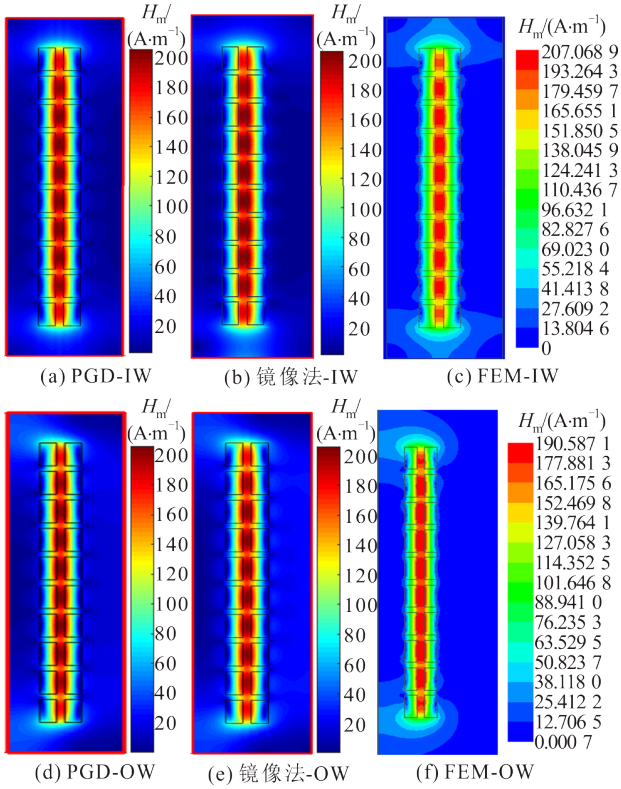


图 9 磁场计算对比图

Fig.9 Comparison diagram of magnetic field calculation

尽管 PGD 算法显著提升了计算效率，但其应用仍受限于几何结构的可分离性假设，对于无法通

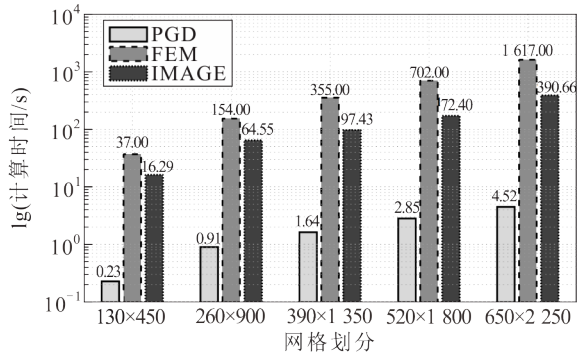


图 10 不同算法计算时间对比

Fig.10 Comparison of calculation time of different algorithms

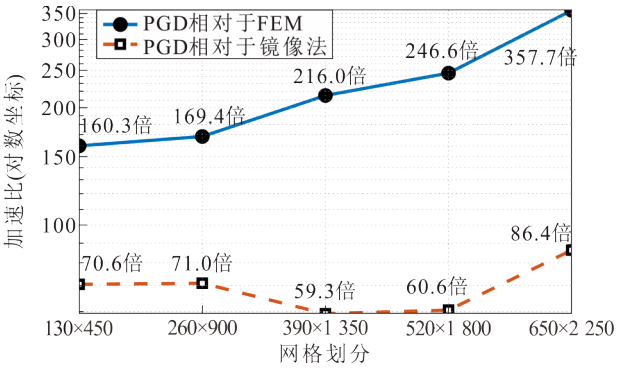


图 11 相对于有限元法和镜像法的 PGD 加速比

Fig.11 PGD speedup ratio over FEM and method of images

过简单坐标分解近似表达的复杂几何结构，需要进行额外分解处理。因此，该方法更适用于几何相对规则、具有一定可分离特性的典型计算模型。

PGD 算法的高效计算能力，可为数字孪生系统实现绕组损耗动态计算、多参数拓扑优化及高频次故障预测。该技术不仅突破了涡流损耗模拟效率瓶颈，还为物理设备与数字孪生体的实时互联提供了关键技术参考，成为物理设备与数字孪生体互联的关键技术。

4 结论

本文提出了一种基于本征广义分解(PGD)空间解耦与等效复磁导率的联合建模方法，实现了高频变压器矩形利兹线绕组损耗的快速计算，并得出如下结论：

1）首次将 PGD 空间分离策略应用于高频变压器矩形利兹线绕组的二维磁场计算，将计算复杂度从二维有限元法的 $O(N^2)$降至近线性 $O(N)$，解决了传统方法计算效率低下的问题。

2）在 1 kHz~1 MHz 宽频范围内对 2 款不同规格样机的实验和计算结果表明，所提模型交流电阻预测值与实测值的最大相对误差不超过 9.8%，算法模型具有良好的工程精度。在计算效率方面，PGD 算法的平均耗时仅为传统有限元法的 0.47%与镜像法的 1.46%，实现了百倍以上的加速效果。

本文所构建的 PGD-复磁导率模型，不仅解决了高频变压器绕组损耗实时计算的效率瓶颈，也为电力电子装备的智能设计、状态评估与数字孪生闭环验证提供了可靠的理论基础。

附录见本刊网络版(http://hve.epri.sgcc.com.cn)。

参考文献 References

[1] 刘任，李常建，唐波. 基于 LS-SVM 与 NSGA-Ⅱ的高频变压器优化设计方法[J]. 高电压技术，2025，51(10)：5166-5174.
LIU Ren, LI Changjian, TANG Bo. Optimal design method of high-frequency transformer based on LS-SVM and NSGA-Ⅱ[J]. High Voltage Engineering, 2025, 51(10): 5166-5174.

[2] 傅明利，王威望，赵小军，等. 大功率高频变压器关键技术与发展趋势[J]. 高电压技术，2024，50(10)：4377-4387.
FU Mingli, WANG Weiwang, ZHAO Xiaojun, et al. Key issues and development prospects in high power high-frequency transformer[J]. High Voltage Engineering, 2024, 50(10): 4377-4387.

[3] 朱广闻，郝福钦，申南轩，等. 考虑绝缘介质荷电影响的三维离子流场计算及特性分析[J]. 电网技术，2024，48(11)：4638-4647.
ZHU Guangwen, HAO Fuqin, SHEN Nanxuan, et al. Three-dimensional ion flow field calculation and characteristic analysis considering the influence of dielectric charge[J]. Power System Technology, 2024, 48(11): 4638-4647.

[4] 李露露，李永培，张明保，等. 新型高压单芯电缆特殊接地方式及其综合性能分析[J]. 电网技术，2024，48(12)：5169-5178.
LI Lulu, LI Yongpei, ZHANG Mingbao, et al. Novel special grounding method for high voltage single-core cables and its comprehensive performance study[J]. Power System Technology, 2024, 48(12): 5169-5178.

[5] DOWELL P L. Effects of eddy currents in transformer windings[J]. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 1966, 113(8): 1387-1394.

[6] FERREIRA J A. Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 1994, 9(1): 127-131.

[7] TOURKHANI F, VIAROUGE P. Accurate analytical model of winding losses in round Litz wire windings[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2001, 37(1): 538-543.

[8] SHARMA A, KIMBALL J W. Evaluation of transformer leakage inductance using magnetic image method[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2021, 57(11): 8401912.

[9] 赵志刚，王凯，陈天缘，等. 利兹线绕组高频变压器漏感双二维镜像法计算模型[J]. 电工技术学报，2025，40(18)：5715-5727.
ZHAO Zhigang, WANG Kai, CHEN Tianyuan, et al. Model for calculating leakage inductance of high-frequency transformer with Litz-wire winding by double-2-D image method[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2025, 40(18): 5715-5727.

[10] 赵志刚，张子洁，陈天缘，等. 基于镜像法的高频变压器利兹线损耗解析计算模型[J/OL]. 高电压技术，2025：1-12[2025-10-27].

https://doi.org/10.13336/j.1003-6520. hve. 20250394.
ZHAO Zhigang, ZHANG Zijie, CHEN Tianyuan, et al. Analytical calculation model of Litz wire loss in high-frequency transformer based on mirror method[J/OL]. High Voltage Engineering, 2025: 1-12 [2025-10-27]. https://doi.org/10.13336/j.1003-6520. hve. 20250394.

[11] 张鹏宁，李朋阳，刘泽，等. 圆形利兹线高频变压器双二维漏感解析计算模型[J]. 高电压技术，2025，51(1)：75-87.
ZHANG Pengning, LI Pengyang, LIU Ze, et al. Double two-dimensional leakage inductance analytical calculation model of round Litz-wire high frequency transformer[J]. High Voltage Engineering, 2025, 51(1): 75-87.

[12] 赵志刚，刘朝阳，贾慧杰，等. 圆形利兹线绕组高频损耗三维快速计算模型[J]. 中国电机工程学报，2024，44(19)：7901-7910.
ZHAO Zhigang, LIU Zhaoyang, JIA Huijie, et al. Fast three-dimensional calculation mode for high frequency loss of circular Litz-wire windings[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(19): 7901-7910.

[13] KAWAHARA S, UMETANI K, HIRAKI E. Analysis and prediction of AC resistance of Litz wire with rectangular cross-section[C]//2020 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE). Detroit, USA: IEEE, 2020: 3273-3279.

[14] 陈彬，褚琰，唐波，等. 基于热-流耦合的高频变压器液冷结构设计与优化[J/OL]. 高电压技术，2025：1-14[2025-10-27]. https://doi.org/10.13336/j. 1003-6520. hve. 20251096.
CHEN Bin, CHU Yan, TANG Bo, et al. Design and optimization of liquid-cooling structure for high-frequency transformers based on thermal-fluid coupling[J/OL]. High Voltage Engineering, 2025: 1-14 [2025-10-27]. https://doi.org/10.13336/j.1003-6520.hve. 20251096.

[15] 蒋耀林. 模型降阶方法[M]. 北京：科学出版社，2010.
JIANG Yaolin. Model order reduction method[M]. Beijing, China: Science Press, 2010.

[16] CHINESTA F, CUETO E. PGD-based modeling of materials, structures and processes[M]. Cham, Germany: Springer, 2014.

[17] CHINESTA F, KEUNINGS R, LEYGUE A. The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations[M]. Cham, Germany: Springer, 2013.

[18] CHINESTA F, AMMAR A, LEYGUE A, et al. An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2011, 166(11): 578-592.

[19] BOGNET B, BORDEU F, HINESTA F, et al. Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3D solutions with 2D computational complexity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 201/204: 1-12.

[20] PINEDA-SANCHEZ M, CHINESTA F, ROGER-FOLCH J, et al. Simulation of skin effect via separated representations[J]. COMPEL, 2010, 29(4): 919-929.

[21] PINEDA-SANCHEZ M, SAPENA-BAÑO A, PEREZ-CRUZ J, et al. Internal inductance of a conductor of rectangular cross-section using the proper generalized decomposition[J]. COMPEL, 2016, 35(6): 2007-2021.

[22] HENNERON T, CLÉNET S. Application of the proper generalized decomposition to solve magnetoelectric problem[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(3): 7202004.

[23] HENNERON T, CLÉNET S. Model order reduction of quasi-static problems based on POD and PGD approaches[J]. The European Physical Journal-Applied Physics, 2013, 64(2): 24514.

[24] HENNERON T, CLÉNET S. Application of the PGD and DEIM to solve a 3-D non-linear magnetostatic problem coupled with the circuit equations[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2016, 52(3): 7202104.

[25] IGARASHI H. Semi-analytical approach for finite-element analysis of multi-turn coil considering skin and proximity effects[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2017, 53(1): 7400107.

[26] OLLENDORFF F. Magnetostatik der massekerne[J]. Archiv für Elektrotechnik, 1931, 25(6): 436-447.

[27] SULLIVAN C R. ZHANG R Y. Analytical model for effects of twisting on Litz-wire losses[C]//2014 IEEE 15th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL). Santander, Spain: IEEE, 2014: 1-10.

[28] 汤蕴璆. 电机内的电磁场[M]. 2 版. 北京：科学出版社，1998.
TANG Yunqiu. The electromagnetic field inside the electrical machines[M]. 2nd ed. Beijing, China: Science Press, 1988.



钟立国
1994—，男，博士生
主要从事电工装备电磁场数值计算与模型降阶方面的研究工作
E-mail: 15702424950@163.com

ZHONG Liguo
Ph.D. candidate

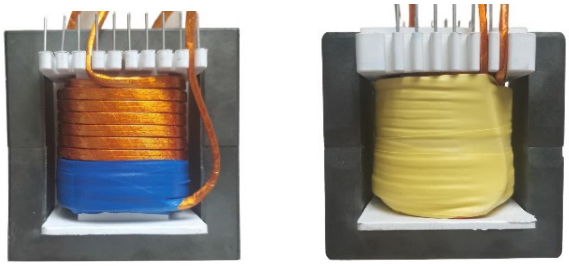


阎秀恪(通信作者)
1973—，女，博士，教授，博导
主要从事电工装备耦合物理场数值分析与优化设计、大规模数值计算并行算法等研究
E-mail: yanxk@sut.edu.cn

YAN Xiuke
Ph.D., Professor
Corresponding author

收稿日期 2025-08-25 在线出版日期 2025-12-26 编辑 程子丰

附录 A：实验平台



(a) 样机 I　　(b) 样机II

图 A1　方形利兹线绕组高频变压器样机

Fig.A1　Prototype of square Litz wire winding high frequency transformer

表 A1　样机I和样机II的参数

Table A1　Parameters of prototype I and prototype II

结构参数	样机I	样机II
绕组层数比	1:1	1:1
每层匝数比	10:10	13:13
绕组高度/mm	47	26.1
原副边绝缘距离/mm	1	1
利兹线股数 N_0	600	300
利兹线直径 D_S/mm	0.1	0.1
利兹线截面尺寸/mm	2.1×4.2	2.0×2.4

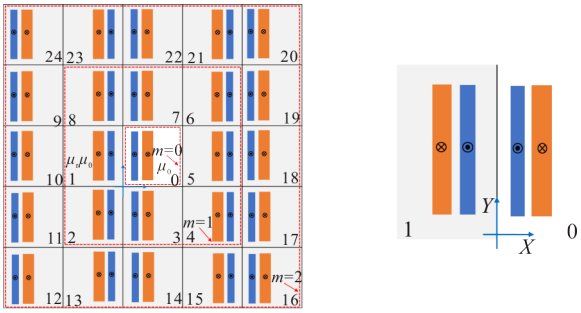


图 A2　高频变压器损耗测量平台

Fig.A2　High frequency transformer loss measurement platform

附录 B：镜像法

针对矩形截面绕组镜像法计算，其方法不同于圆形截面绕组，单个矩形绕组在空间任一观察点 $P(x, y)$处的矢量磁位为源绕组和镜像绕组对该点处产生的矢量磁位的叠加，当计算场域有 n 个矩形绕组时，空间任一点 $P(x, y)$处的矢量磁位为 n 个矩形绕组的 4 个顶点在该处矢量磁位的叠加。矩形绕组截面镜像法内外窗示意图如图 B1 所示，根据铁芯窗口内矢量磁位 $\vec{A}_z$ 解析表达式计算得到矩形截面绕组高频变压器内外窗磁场分布[28]。



(a) 镜像法-IW　　(b) 镜像法-OW

图 B1　矩形绕组截面镜像法内外窗示意图

Fig.B1　Schematic diagram of inner and outer windows for mirror method of rectangular winding cross-section

$$A_z(x,y)=\frac{-\mu_0}{4\pi}J_k\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{4}(-1)^j((x-x_{kj})(y-y_{kj})\ln((x-x_{kj})^2+(x-x_{kj})^2\arctan(\frac{y-y_{kj}}{x-x_{kj}})+(y-y_{kj})^2\arctan(\frac{x-x_{kj}}{y-y_{kj}}))-x_{kj}y_{kj}\ln(x_{kj}^2+y_{kj}^2)-x_{kj}^2\arctan(\frac{y_{kj}}{x_{kj}})-y_{kj}^2\arctan(\frac{x_{kj}}{y_{kj}}))\tag{B1}$$

由于 $\vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{H}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{H}}$，可得到二维场域中任一点 $P(x,y)$ 点的磁密 H_x 和 H_y：

$$H_x(x,y)=\frac{-1}{4\pi}J_k\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{4}(-1)^j((x-x_{kj})\ln((x-x_{kj})^2+(y-y_{kj})^2)+(x-x_{kj})+2(y-y_{kj})^2\arctan(\frac{x-x_{kj}}{y-y_{kj}}))\tag{B2}$$

$$H_y(x,y)=\frac{1}{4\pi}J_k\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{4}(-1)^j((y-y_{kj})\ln((y-y_{kj})^2+(y-y_{kj})^2)+(y-y_{kj})+2(x-x_{kj})^2\arctan(\frac{y-y_{kj}}{x-x_{kj}}))\tag{B3}$$

式中：J_k 第 k 根导体的电流密度向量；x_{kj}、y_{kj} 分别为第 k 个矩形载流导体的第 j 个顶点的 x 坐标和 y 坐标。

当具有 M 层镜像时，窗口内任一点矢量磁位采用叠加法，其值为：

$$A_Z(x,y)=\sum_{i=-M}^{M}\sum_{j=-M}^{M}k^m A_{z,ij}(x,y)\tag{B4}$$

式中：$m=\max(|i|,|j|)$。

窗口中任一点磁密 H'_x 和 H'_y 分别为：

$$\begin{cases} H'_x(x,y) = \sum_{i=-M}^{M} \sum_{j=-M}^{M} k^m H_{x,ij}(x,y) \\ H'_y(x,y) = \sum_{i=-M}^{M} \sum_{j=-M}^{M} k^m H_{y,ij}(x,y) \end{cases} \tag{B5}$$