引文格式：李瑞红,刘大鹏,胡书友. 小波去噪改进 GM(1,1)模型在高速公路变形监测中的应用[J]. 地理空间信息, 2024, 22(10): 96-99. doi: 10. 3969/j.issn. 1672-4623.2024.10.023

小波去噪改进 GM(1,1)模型在高速公路变形监测中的应用

李瑞红[1]，刘大鹏[1]，胡书友[1*]
（1. 广东省测绘工程有限公司，广东 广州 510700）

摘　要：针对灰色 GM(1,1)模型在变形监测数据建立预测模型精度较低的问题，采用小波阈值去噪与改进灰色模型的组合模型。首先介绍了小波阈值去噪方法；其次介绍了 2+种灰色模型，在背景值公式中引入辛普森公式建立了基于背景值优化的改进灰色模型；最后以高速公路路基沉降监测点为例进行数据分析，将原始高速公路路基变形监测数据进行小波阈值去噪处理，通过信噪比和均方差确定小波基函数 Sym3，分解层数为 1 层；基于传统 GM(1,1)模型、新陈代谢灰色模型、小波去噪结合改进 GM(1,1)模型、小波去噪结合改进新陈代谢灰色模型 4 种计算方案进行预测对比。实验结果表明，基于小波去噪的改进灰色优化模型的预测精度最高。验证了小波去噪的改进新陈代谢灰色模型更加贴合本次高速公路路基沉降的变形趋势。

关键词：高速公路路基；变形监测；小波阈值去噪；背景值优化
中图分类号：P258　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2024）10-0096-04

Application of Improved GM(1,1) Model Based on Wavelet Denoising in Deformation Monitoring of Expressway

LI Ruihong[1], LIU Dapeng[1], HU Shuyou[1]
(1. Guangdong Surveying and Mapping Engineering Co., Ltd., Guangzhou 510700, China)

Abstract: In order to solve the problem of low accuracy of grey GM(1,1) model in establishing prediction model based on deformation monitoring data, we adopted a combined model of wavelet threshold denoising and improved grey model. Firstly, we introduced the wavelet threshold denoising method. Then, we introduced two grey models, and introduced the Simpson formula into the background value formula to establish an improved grey model based on background value optimization. Finally, taking the expressway subgrade settlement monitoring points for example, we processed the original expressway subgrade deformation monitoring data by wavelet threshold denoising, and determined the wavelet basis function Sym3 through the signal to noise ratio and mean square deviation. We compared the traditional GM(1,1) model, metabolic grey model, wavelet denoising combined with improved GM(1,1) model and wavelet denoising combined with improved metabolic grey model for prediction. The experimental result shows that the improved grey optimization model based on wavelet denoising has the highest prediction accuracy, which verifies that this method is more in line with the deformation trend of highway roadbed settlement.

Key words: expressway subgrade, deformation monitoring, wavelet threshold denoising, background value optimization

高速公路路基变形的不均匀沉降预测方法一般可分为 2 种：①基于土体压缩原理的沉降计算。②基于土体沉降与时间的变化规律分析，从而进行沉降预测。相关学者在高铁路基沉降、高速公路路堤沉降等实际工程项目中采用灰色模型进行沉降趋势预测分析，在原始监测数据质量较高的情况下，取得了精度较高的沉降变形趋势预测效果[1-3]。但由于灰色 GM（1,1）模型理论基础存在一定缺陷，使得灰色模型短期内能够较为准确地预测沉降变形，长期预测过程中可能存在预测精度降低现象[4]；同时，路基沉降监测过程中受观测手段或者外界条件的影响，原始观测数据中普遍存在噪声干扰或系统误差影响[5]，在一定程度上也会对灰色模型预测精度产生影响，因此需要对原始观测数据进行小波阈值去噪的预处理工作，提高原始观测数据质量，保障建模精度。

针对上述问题，本文建立基于小波去噪的改进灰色模型。以茂湛高速公路路基监测点建进行实验数据分析，首先采用小波阈值去噪方法通过选择合适的小波基函数、分解层数和阈值规则进行原始观测数据预

收稿日期：2023-06-05。
项目来源：广东省科技计划资助项目（2018B020207002）。
第一作者简介：李瑞红（1989—），工程师，主要从事工程测量、地理信息系统、国土调查等方向的生产与研究工作，E-mail：lrh8907@21cn.com。
通信作者：胡书友（1991—），本科，工程师，主要从事测绘工程生产与研究工作，E-mail：hsy9111@21cn.com。

处理；然后，建立灰色模型背景值时引入辛普森公式建立改进灰色模型，选择前11期观测数据作为样本数据建立预测模型，通过精度检验比较4种预测模型并验证小波去噪结合改进灰色模型的组合优化模型在高速公路路基形变监测中的可靠性与优越性。

1　小波阈值去噪法

为了削弱观测过程中由于观测条件等造成的误差，相关文献采用小波阈值去噪的方法对原始观测数据进行数据预处理。假设某一维含噪声的信号模型表示为：

$$f(t)=s(t)+n(t) \tag{1}$$

式中，$s(t)$ 为原始信号；$n(t)$ 为方差，是 σ^2 的高斯白噪声且服从 $N(0,\sigma^2)$。

基于小波阈值去噪的原理，对于变形监测数据的处理首先需要选定合适小波基函数按照选定的层数进行分解得到相应的小波系数；其次，对于低于或者高于阈值的小波系数，根据阈值函数与阈值规则处理分解得到的小波系数；最终，以小波重构方式获得去噪的新监测数据[6-7]。

阈值函数的选取关系到数据处理的质量。其中，硬阈值函数的数学表达式为：

$$\hat{\omega}_{j,k}=\begin{cases}\omega_{j,k} & |\omega_{j,k}|\geq\lambda\\ 0 & |\omega_{j,k}|<\lambda\end{cases} \tag{2}$$

式中，$\hat{\omega}_{j,k}$ 为小波系数估计值；$\omega_{j,k}$ 为第 j 层小波系数；λ 为阈值门限。

软阈值函数的数学表达式为：

$$\hat{\omega}_{j,k}=\begin{cases}\mathrm{sign}\left(\omega_{j,k}\right)\left(|\omega_{j,k}|-\lambda\right) & |\omega_{j,k}|\geq\lambda\\ 0 & |\omega_{j,k}|<\lambda\end{cases} \tag{3}$$

式（2）和式（3）中阈值规则表达式为：

$$\begin{aligned}\lambda&=\sigma\sqrt{2\ln N}\\ \sigma&=\frac{\sum_{k=1}^{n}|\hat{\omega}_{j,k}|}{0.674\,5n}\end{aligned} \tag{4}$$

式中，σ 为经过第 j 层小波变换后的均方差。

2　背景值优化的改进灰色模型

2.1　灰色GM(1,1)模型建立

建立GM(1,1)模型的基本思路是对选取原始观测样本数据进行累加计算，并建立微分方程求解通解并通过累减还原获得预测值的过程。将采集得到的原始观测数据序列 $x^{(0)}=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\right\}$ 进行一次累加计算生成累加序列[8]。

$$x^{(1)}=\left\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\right\} \tag{5}$$

式中，$x^{(1)}(t)=\sum_{k=1}^{t}x^{(0)}(k)\quad t=1,2,\cdots,n$。

式（5）序列的变化趋势满足白化微分模型：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b \tag{6}$$

通过最小二乘准则求解微分方程待求参数估值为：

$$[a\ b]=\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-Z^{(1)}(t_2) & 1\\ -Z^{(1)}(t_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -Z^{(1)}(t_k) & 1\end{bmatrix}$，$Z^{(1)}(t_k)=0.5\times\left(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)\right)$。

考虑到初始条件 $x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$ 代入微分方程中即可求解通解：

$$x^{(1)}(t)=\left[x^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-at}+\frac{b}{a} \tag{8}$$

通过式（8）得到各个观测值的预测值，进行预测值还原：

$$x^{(0)}(t)=x^{(1)}(t)-x^{(1)}(t-1) \tag{9}$$

由于传统灰色模型中起始观测数据对观测模型存在一定的影响，可以采用新陈代谢灰色模型。与传统灰色模型的不同之处在于，在累加序列中添加新数据，即去除原始序列第一个观测值[9]，组成新的累加序列构建灰色模型。若不满足预测精度则继续舍弃原始数据生成新的累加序列，通过反复进行数据更新，直到预测值达到预测精度为止，建立 n 维新陈代谢模型[10]。

2.2　背景值的优化方法

Newton-Cotes 表达式为 $I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)$ 可知，当 $n=1$ 时，Cotes 系数 $C_0^{(1)}=C_1^{(1)}=\frac{1}{2}$，此时表达式形式为：

$$I=\frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \tag{10}$$

式（10）与灰色模型式（6）的背景值表达式形式一致，因此可以采用Newton-Cotes公式优化背景值表达式。当 $n=2$ 时相应的公式称为Simpson公式并引入灰色模型背景值表达式中[11-13]：

$$Z^{(2)}(t_k)=\frac{1}{6}\times\left(x^{(1)}(k-1)+4x^{(1)}\left(\frac{2k-1}{2}\right)+x^{(1)}(k)\right) \tag{11}$$

2.3　基于小波去噪的改进灰色模型算法流程

基于小波阈值去噪的基本原理与优化背景值的灰色模型，构建基于小波去噪的改进灰色模型，其具体计算步骤为：①原始沉降观测数据利用小波阈值去噪

得到建立灰色模型的数据，主要确定阈值函数、阈值规则、分解层数等[13]；②将预处理数据建立灰色模型，其中在背景值构造利用式（11）进行计算；③通过微分方程式（6）反算参数 a，b，得到灰色模型表达式；④采用式（9）进行预测值还原，得到各沉降观测点预测值。

3 实例分析

3.1 数据来源

本文以沈阳至海口国家高速公路茂名至湛江段改扩建工程第三方安全监测数据为数据源，根据现有的监测方案选择共计15期观测数据，采用按照国家水准测量规范要求观测垂直位移，选取累计变化量最大的监测点进行沉降分析。以前11期作为样本数据，最后4期为预测数据进行预测分析。

3.2 预测模型结果对比分析

3.2.1 小波阈值去噪效果

利用MATLAB中小波工具箱对原始路基监测数据进行预处理：①选择小波基函数。根据小波基函数的特性选用Sym N小波基函数；②小波系数处理时由于硬阈值函数存在直接置零的的缺点，因此阈值函数选用软阈值函数；③为确定分解层数，以信噪比和均方差确定小波基函数为Sym 3小波基函数，分解层数为1。

其中，信噪比与均方差的计算方法为：

$$\mathrm{SNR}=10\lg\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}f^2(i)}{\sum_{i=1}^{n}\left(f(i)-\bar{f}(i)\right)^2}\right\} \tag{12}$$

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(i)-\bar{f}(i)\right)^2}$$

式中，$f(i)$ 为原始信号，$\bar{f}(i)$ 为去噪后信号。

对样本数据进行小波去噪处理后得到的数据的拟合效果可计算平均绝对百分误差：

$$\mathrm{MAPE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|v_i|}{|w_i|}\times 100 \tag{13}$$

式中，$|v_i|$ 为预测残差的绝对值；$|w_i|$ 为实测值的绝对值；n 为观测次数。

去噪数据的平均绝对百分比误差为9.627 4，属于高精度拟合，说明小波去噪在高速路路基变形数据处理中具有较高的拟合精度。

3.2.2 不同模型的预测结果与分析

新陈代谢灰色模型与背景值优化在相关文献中均为传统灰色模型的改进方法并取得了不错的效果，为了研究二者相结合建立的改进灰色模型的预测效果，设计如下4种计算方案（表1）。

表1 不同预测方案

方案序号	预测方案
方案1	传统灰色模型
方案2	新陈代谢灰色模型
方案3	基于优化背景值的传统灰色模型
方案4	基于优化背景值的新陈代谢灰色模型

通过去噪后数据计算不同样本数目下的拟合优度。当样本数量为11时，拟合优度最接近于1。确定拟合样本数量后，通过4种预测模型方案计算得到预测值与实测值的残差值成果（表2）以及精度评价（表3）。

表2 不同方案预测模型数据成果

观测期次	实测值/mm	方案1		方案2		方案3		方案4	
		预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm
12	2.65	2.92	0.27	2.89	0.24	2.73	0.08	2.71	0.06
13	2.71	2.97	0.26	2.92	0.21	2.78	0.07	2.75	0.04
14	2.78	3.01	0.23	2.97	0.19	2.85	0.07	2.82	0.04
15	2.81	3.05	0.24	3.01	0.20	2.93	0.12	2.90	0.09

表3 不同方案预测模型精度评价

	指标	方案1	方案2	方案3	方案4
数据拟合	最大残差/mm	0.32	0.27	0.18	0.12
	均方误差/mm	0.28	0.24	0.16	0.09
数据预测	最大残差/mm	0.27	0.24	0.12	0.09
	均方误差/mm	0.26	0.21	0.09	0.06

通过不同预测结果对比可以分析：

1）表2反映4种灰色模型计算方案在最后4期路基变形监测点的预测结果与实测值的对比，4种模型残差值的平均值分别为0.25、0.21、0.09、0.06 mm，方案4即基于优化背景值的新陈代谢灰色得到的残差值平均值在4种计算方案里是最小的，最后4期预测值的预测值均方误差为0.07 mm，预测数据更加贴合实测数据的变化趋势；同时，经过小波去噪和优化背景值处理建立的灰色预测模型（方案3、4）预测效果较传统灰色模型（方案1、2）的预测效果更好，对比方案3与方案4，基于优化背景值的新陈代谢灰色模型的预测偏差最小，预测精度最高。

2）表3对各个方案针对所有观测数据在拟合阶段与数据预测阶段进行了精度统计，方案4在前11期作为数据拟合预测阶段与最后4期作为预测阶段的情况下，最大残差值分别为0.12、0.09 mm，均方差分别为0.09、0.06 mm，在4种预测模型里预测精度最高，本文小波去噪的改进灰色模型符合实测值的变化趋势，可以适用于本工程应用。

3）为了验证改进灰色模型可信度，对本文建立的灰色模型进行模型精度检验，基于小波阈值去噪的新陈代谢GM（1，1）预测模型相对误差 $q=0.008\,3$，方差比 $C=0.32$，小误差概率 $P=0.96$，等级为Ⅰ等。

4　结　语

针对本文分析高速路基位移监测数据建立预测模型的问题，选择了短期内预测具有明显优势的灰色模型好，结合背景值优化方法提出改进灰色模型；同时，由于观测数据存在的噪声干扰，建立了基于小波阈值去噪的改进灰色模型，通过数据处理和对比分析比较了不同灰色模型的预测效果，其中小波阈值去噪的改进GM(1,1)模型具有较好的预测效果，提高了灰色模型在数据预测模型应用中的预测精度。同时，本文针对灰色模型的改进中关于背景值的优化方法，除了引入辛普森公式相关文献提出其他的优化方法，有待于进一步研究。

参考文献

[1] 潘顺宇,付饶. 灰色时序模型在建筑物沉降观测中的应用[J]. 地理空间信息,2022,20(10):147-150

[2] 岳仁宾,滕德贵,胡波,等. 灰色模型在深基坑变形监测中的应用研究[J]. 测绘通报,2014(增刊):85-87

[3] 魏瑶. 基于时间序列和灰色模型的大厦基坑监测[J]. 地理空间信息,2022,20(9):90-94

[4] 董坤烽. 基于小波去噪的灰色Verhulst模型在变形监测中的应用[J]. 地理空间信息,2022,20(10):113-116

[5] 沈哲辉,黄腾,葛文,等. 基于小波分析的灰色-神经网络组合模型在大坝变形预测中的应用[J]. 测绘工程,2015,24(11):51-53

[6] 邓军. 小波阈值去噪法在矿区地表变形监测数据处理中的应用[J]. 测绘与空间地理信息,2020,43(3):31-33

[7] 徐秀杰,黄张裕,凌晨阳,等. 基于小波分析的灰色组合模型在变形监测数据处理中的应用[J]. 工程勘察,2014,42(4):80-83

[8] 黄浩,高俊强,苏小文,等. 变形预测模型在地铁保护区监测中的应用[J]. 地理空间信息,2017,15(1):104-106

[9] 吴瑞芳,刘佳. 基于新陈代谢灰色系统模型矿井涌水量预测[J]. 煤炭与化工,2021,44(8):38-40

[10] 容静,刘立龙,甘祥前,等. 用小波分析与灰色支持向量机预测高铁变形[J]. 大地测量与地球动力学,2018,38(5):473-476

[11] 程朋欢,卢德基. 一种基于沉降预测的灰色模型背景值优化方法[J]. 测绘地理信息,2022,47(5):51-53

[12] 杨帆,谢洋洋,邵阳. 小波去噪的灰色最小二乘支持向量机变形预测[J]. 测绘科学,2017,42(10):134-137,160

[13] 褚宁,米川. 优化灰色模型在基坑变形监测中的应用[J]. 测绘与空间地理信息,2022,45(9):208-211

（上接第82页）

法，并且不改变整体数据量，为用户在地形级实景三维地理场景中浏览重点关注区域提供了高现势性、高层级、高分辨率的地形瓦片，从而有效保证了更新场景的绘制速率和质量。

参考文献

[1] 朱庆,张利国,丁雨淋,等. 从实景三维建模到数字孪生建模[J]. 测绘学报,2022,51(6):1 040-1 049

[2] 覃雪梅,王伟立,贾伟定,等. 基于倾斜摄影测量的三维数字城市建模研究[J].地理空间信息,2022,20(9):41-44

[3] 姚春雨,彭桂辉,段梦琪. 大场景三维渲染关键技术研究及实现[J]. 地理空间信息,2019,17(10):96-98

[4] 陈静,陈帆飞,周强. 全球地形数据多尺度晕渲及服务研究[J]. 测绘通报,2011(7):27-29

[5] 刘华光,王军军,寇媛. 利用无人机激光点云数据更新地形级实景三维地理场景[J]. 测绘通报,2022(9):111-114

[6] 王慧,王利勇,闫科,等. 无序航空遥感影像的三维地形重建[J].测绘科学技术学报,2021,38(1):33-38

[7] Liu Y, Xu S, Zhu T, et al. Application of Multi-source Data Fusion Method in Updating Topography and Estimating Sedimentation of the Reservoir[J]. Water,2020,12(11):3 057

[8] Aquilio A S, Brooks J C, ZHU Y, et al. Real-time GPU-based Simulation of Dynamic Terrain[J]. Lecture Notes in Computer Science,2006:891-900

[9] Zhang B Q, Zhang L M, Ai Z L, et al. Adaptive GPU Terrain Rendering Based on Synthetical LOD Factor[J]. Jisuanji Gongcheng/Computer Engineering,2012,38(12):56-59

[10] Livny Y, Sokolovsky N, Grinshpoun T, et al. A GPU Persistent Grid Mapping for Terrain Rendering[J]. The Visual Computer,2008,24(2):139-153

[11] 刘浩,曹巍. 三维地形场景局部高精度地形快速更新方法[J].计算机工程与应用,2014,50(7):1-4

[12] Yusov E, Shevtsov M. High-performance Terrain Rende Ring Using Hardware Tessellation[J]. Journal of WSCG, 2011, 19(3): 85-92

[13] 李鹤元,陈刚,柯希林. 三维地形数据塔式结构模型与可视化方法研究[J]. 地理空间信息,2016,14(9):12-16,42

[14] 王俊勇,詹勇. 一种基于GPU的三维数字地形实时编辑方法[J]. 城市勘测,2016 (1): 93-97