第 52 卷 第 5 期：2312-2326 高电压技术 Vol.52, No.5: 2312-2326
2026 年 5 月 31 日 High Voltage Engineering May 31, 2026
DOI: 10.13336/j.1003-6520.hve.20251252

分离绕组变压器漏感的建模方法

伍家驹[1]，陈其庆[1]，高思远[2]，陈亮亮[1]，靳晓光[1]
（1. 南昌航空大学信息工程学院，南昌 330063；2. 江西省检验检测认证总院，南昌 330052）

摘　要：为提高分离绕组变压器漏感量的计算精度，提出了一种兼顾铁芯和绕组径向磁场的漏感分析方法。首先，用实验唯象揭示了铁芯漏磁能的存在，从 *B-H* 曲线求出交流有效磁导率，并借助典型软铁求出硅钢片主磁感线与铁芯界面法线的夹角，推算出铁芯的径向漏磁能及其对应的漏感。然后，用长径比表达绕组轴、径向漏磁能密度曲线，通过研判磁能定积分的上下限确定绕组轴向的两对称虚拟端面，以算出与绕组轴向、径向磁场对应的漏磁能及其漏感。最后，用 4D 技术渲染铁芯漏感和绕组漏感的数值分布，为操控漏感建模提供取值范围。实际工况下的漏感测算和 LCR 电桥测量均检验了所控漏感的误差小于 4%，并以漏感取代 LC 滤波器中的电感器展现了该建模方法的有效性。该研究可为操控分离绕组变压器漏感和测算绕组本体径向磁场提供参考。
关键词：变压器；分离绕组；径向磁场；铁芯；建模；漏感

Modeling Method for the Leakage Inductance of Separated Winding Transformer

WU Jiaju[1], CHEN Qiqing[1], GAO Siyuan[2], CHEN Liangliang[1], JIN Xiaoguang[1]
(1. College of Information Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China;
2. Jiangxi General Institute of Testing and Certification, Nanchang 330052, China)

Abstract: To improve the calculation accuracy of leakage inductance in separated winding transformers, a leakage inductance analysis method that accounts for both the core and winding radial magnetic fields was proposed. Firstly, the existence of magnetic leakage energy in the iron core was revealed by experiments. The alternating effective magnetic permeability was obtained from the *B-H* curve; meanwhile, by utilizing typical soft iron, the angle between the main magnetic flux lines of the silicon steel sheet and the normal to the iron core interface was determined, and the radial leakage magnetic energy of the iron core along with its corresponding leakage inductance were calculated. Then, the length-to-diameter ratio was used to express the leakage magnetic energy density curves of the winding shaft and radial directions. By analyzing the upper and lower limits of the magnetic energy definite integral, the two symmetrical virtual end faces of the winding axis were determined, which was used to select and discard the leakage magnetic energy and leakage inductance corresponding to the winding shaft and radial magnetic fields. Finally, the numerical distribution of core leakage inductance and winding leakage inductance was rendered using 4D technology to provide a range of values for modeling control leakage sensation. The leakage inductance measurement under actual working conditions and the LCR bridge measurement both verified that the error of the controlled leakage inductance was less than 4%, and the effectiveness of this modeling method was demonstrated by replacing the inductor in the LC filter with leakage inductance. This research can provide a reference for manipulating the leakage inductance of separated winding transformers and calculating the radial magnetic field of the winding body.
Key words: transformer; separate windings; radial magnetic field; iron core; modeling; leakage inductance

0　引言

漏感对变压器特性和周边器件都有着重要影响[1-3]。按绕组配置来分，变压器有同心式和分离式两类[4]，前者有简洁的漏感公式，后者的漏感表达却尚无定论[5-8]，若用前者的公式计算后者的漏感则会产生数百倍误差。分离式绕组在磁集成中是设计者的主观选择[9-10]，在多相整流等电路中却是换相时的客观效果[4,11]。滤波、谐振和软开关等场合常对漏感大小有要求[1,12-13]，而将描述三维分布参数间的电磁能量交换，映射成由集中等效元件所构成的电路并操控其漏感，在技术路线上仍未统一[3,13-16]。

漏感关联着漏磁场，文献[17]用有限元法揭示

基金资助项目：国家自然科学基金(51967015；52565024)。
Project supported by National Natural Science Foundation of China (51967015, 52565024).

变压器漏磁场的数值分布，文献[18-19]在表达环形变压器漏感、研制可变漏感变压器时借助了漏磁通分布图；文献[5-8]的经典公式及其设计软件是在已知电磁/几何参数的条件下，逐步算出漏感可行解，技术路线为：诸变量→模型→求解磁场/漏感[3]；而优化设计是把电磁/几何参数作为决策变量，技术路线为：寻觅决策变量→模型→兼顾多目标[3,20]。因为优化设计涉及多元非线性方程常既无解析解又难觅有用数值解，所以需要有适当的计算方法来求解数值解集，以便将漏感控制在某值域内。

变压器铁芯都有漏磁[16,21-23]，漏磁对应漏感，但基于铁芯的漏感却鲜有报道。铁芯界面两边磁感线与法线夹角的正切之比等于两边磁导率之比[22]，铁芯磁导率与漏磁强相关，而磁导率又与交变磁场强相关，故标称磁导率难以表达交流漏磁、铁芯磁感线与界面的夹角和铁芯漏磁能。分离式绕组间距为磁轭，而长磁轭更有利于铁芯径向漏磁的扩散。因此，应该探究铁芯交变漏磁及其对应的铁芯漏感。

因为被分离的初、次级绕组各有一轴线，且绕组间距远大于同心变压器绕组的间距，所以绕组本体径向漏磁已不能忽略。然而，现有漏感公式并未包含与径向磁场对应的漏感[5-8]；绕组本体的磁场表达源自螺线管模型和单匝圆载流体模型，但该类模型并未精确表达径向磁场[22]。因此，有必要探究绕组本体径向磁场变化对变压器漏感的影响。

本文从铁芯有效磁导率导出铁芯磁感线及其夹角、铁芯径向磁感线及其对应漏感；从载流环径向磁场推导出绕组径向磁场、对应漏磁能及其漏感；用实际工况下的参数测算和电桥测量来验证漏感，并以漏感取代了 LC 滤波器中的电感器[3,21]。

1 基于铁芯的变压器漏感探究

本章从磁感应强度-磁场强度(*B*-*H*)曲线推算有效磁导率、铁芯磁感线与铁芯界面夹角、径向磁感线、漏磁能和对应的铁芯漏感。

1.1 漏磁能和有效磁阻率

1.1.1 铁芯漏磁能的唯象实验

铁芯的交变漏磁通虽为非耗散流，但若让其贯穿紧贴铁芯表面的线圈，则所感应出的交流电流经发光二极管却可变为能观察的耗散流。图 1 中，让铁芯径向交变漏磁通切割 100 匝的空心线圈，则其两端的电势可使型号为HLX-3040RC31的二极管发光，屡次实验还表明，铁芯磁导率越低，二极管所发的光越亮。唯象实验是定量分析的基础。

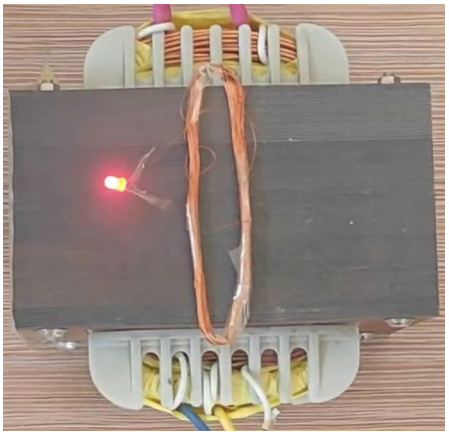


图 1 铁芯漏磁能与发光二极管

Fig.1 Leakage magnetic energy of iron core and light-emitting diode

1.1.2 折射定理和径向漏磁场

折射定理：铁磁质和空气界面两侧磁感线与法线夹角的正切之比 $\tan\theta_0/\tan\theta_{fe}$ 为两侧真空磁导率 μ_0、铁芯磁导率 μ_{fe} 之比[22]，即：

$$\tan\theta_0/\tan\theta_{fe}=\mu_0/\mu_{fe} \tag{1}$$

引理：铁芯存在着径向(法向)磁感应强度

证明：轴线平行于界面、径向分量垂直于轴线，因 $\mu_0/\mu_{fe}\neq 0$，铁芯磁感应强度 B_{fe} 线与界面法向夹角 $\theta_{fe}<0.5\pi$、故 B_{fe} 的径向分量 $B_r=B_{fe}\cos\theta_{fe}\neq 0$，证毕。

1.1.3 铁芯有效磁阻率

在幅值 U_m、角频率 ω 的市电 $u(t)=U_m\sin\omega t$ 激励下，忽略电阻，初级反电势 $e(t)=-NS\mathrm{d}B/\mathrm{d}t\approx u(t)$，匝数 N、铁芯截面 S，磁感应强度瞬时值 $B(t)=B_m\sin\omega t$、磁导率 $\mu(t)=f(B(t))$或 $\mu(t)=f(H(t))$，磁阻率 $\nu(t)=1/\mu(t)$；从简计，暂不讨论在脉冲宽度调制(pulse width modulation，PWM)等波形激励下 $B(t)$ 波形等磁场表达。

定义 1：有效磁阻率 $\nu_\sim$ ——若铁芯 $B(t)$线按正弦变化，其周期 T 内磁能密度的平均值，与以该 $B(t)$ 线最大值通过磁阻率为某常数时的磁能密度 w_m 相等，则该常数的磁阻率为时变磁阻率的有效值。

w_m 可用 B 的有效值 $B_\sim$、幅值 B_m 表示为：

$$w_m=\frac{\nu_\sim}{2}B_\sim^2=\frac{\nu_\sim}{2}\left(\frac{B_m}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\nu_\sim}{4}B_m^2 \tag{2}$$

$$B(t)=B_m\sin\omega t,\ H(t)=\nu(t)H_m\sin\omega t \tag{3}$$

两者右边相等，故经式(4)可得式(5)的 $\nu_\sim$表达。

$$\frac{1}{2T}\int_0^T\frac{H(t)B(t)\sin^2\omega t}{2}\mathrm{d}t=\frac{\nu_\sim B_m^2}{4} \tag{4}$$

$$\nu_{\sim}=\frac{8}{T}\int_0^{T/4}\nu(t)\sin^2\omega t\mathrm{d}t \tag{5}$$

1.1.4 有效磁阻率的算例

本例硅钢片 27Q120 为沿立方晶系[100]取向，B_{fe}≈1.8 T，从说明书工频磁导率 $\mu(t)$可得 $\nu(t)$，再对 0<t<5 ms 区间曲线拟合其效果见图 2，表达见式(6)。

$$\nu(t)=(-3.3t^3-0.034t^2+0.000\ 2t)\times10^9 \tag{6}$$

磁阻|磁导率：将式(6)代入式(5)得式(7)—(10)，ν、μ 的单位为 m/H、H/m；$\mu(t)$的有效值为 $\mu_{\sim}$、相对值为 μ_q。

$$\nu_{\sim}=\frac{8}{T}\int_0^{0.005}\nu(t)\sin^2 314t\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\nu_{\sim}=&4\times10^{11}\int_0^{0.005}-3.3t^3\sin^2 314t\mathrm{d}t+\\&4\times10^{11}\int_0^{0.005}-0.034t^2\sin^2 314t\mathrm{d}t+\\&4\times10^{11}\int_0^{0.005}0.000\ 2t\sin^2 314t\mathrm{d}t\approx82\end{aligned} \tag{8}$$

$$\mu_{\sim}=\mu_{fe}=1/\nu_{\sim}=1/82=0.012 \tag{9}$$

$$\mu_q=\mu_{\sim}/\mu_0=0.012/(4\pi\times10^{-7})=9\ 500 \tag{10}$$

1.2 铁芯 B_{fe} 线夹角及其约束条件

B_{fe} 线常被用来表示磁场[14-16]，借助典型纯铁的已知条件，有利于导出取向硅钢片 B_{fe} 线的夹角 θ_{fe}。

1.2.1 变压器的磁感应强度

用 Ansoft 展现铁芯绕组及其周边磁场见图 3。B_{fe} 周边的 B<<10^{-5} T，难以辨识 B_{fe} 及其径向分量 B_r；μ_{fe} 越大 B_r 越小；两绕组间距内 B 线悖于同心绕组间隙内 B 线恒定的假设[3]；故应分别探究铁芯和绕组的 B 线。

1.2.2 铁芯磁感线的解析

1）式(1)中，θ_0、θ_{fe} 与 μ_0、μ_{fe} 强相关[22]，但若仅有 μ_0、μ_{fe}，仍难求解折射定理中的 θ_0、θ_{fe}。

2）B_{fe} 线几乎平行于铁芯界面，故 θ_{fe} 左→π/2，cosθ_{fe}→0；条件数 $C(\theta_{fe})$越大，输出对于输入越敏感，$C(\theta_{fe})$=cond(tanθ_{fe}) =$|\theta'_{fe}\tan\theta_{fe}|$ /|tanθ_{fe}|=θ_{fe}/(sinθ_{fe}cosθ_{fe})，因条件数 $C(\theta_{fe})$→∞，故 tanθ_{fe} 病态，d(tanθ_{fe})/dθ_{fe} 极大。

3）B_0 线几乎与法线重叠，θ_0 右→0，sinθ_0→0，$C(\theta_0)$=cond(tanθ_{fe})=$|\theta'_0\tan\theta_0|$/|tanθ_0|=θ_0/(sin$\theta_0$cosθ_0)，有 $C(\theta_0)$→1，tanθ_0 呈现良态，有 dtanθ_{fe}/dθ_{fe} 凸变，tanθ_{fe}>>tanθ_0。

4）tanθ_0、μ_0 虽右→0，但其比值 tanθ_0/μ_0 并不小，将式(9)代入式(10)有 tanθ_{fe}=tanθ_0(μ_{fe}/μ_0)=9 500tanθ_0，为说明 θ_{fe} 和 θ_0 的相关性，据式(9)、式(10)可转变为二元函数：

$$Z_0(\theta_{fe},\theta_0)=\tan\theta_{fe}-9\ 500\tan\theta_0 \tag{11}$$

5）因 θ_{fe}>>θ_0，μ_0 已知，μ_{fe} 可从式(9)代入，故有 $f(\theta_{fe},\theta_0)$=μ_{fe}/μ_0=Const，θ_{fe} 左→π/2、θ_{fe}∈(0.95π/2, π/2)，θ_0∈(0, 0.005π)且右趋近于 0，θ_0→0，见图 4。

图 4 中提示，若已知 μ_0、μ_{fe}，按照式(11)可逐步缩小求解式(10)未知数 θ_0、θ_{fe} 的取值范围。

曲线可视化：曲线 $Z_0(\theta_{fe},\theta_0)$=tan$\theta_{fe}$−9 500tan$\theta_0$=0 并无粗细，故无法肉眼识别，令 Z_0∈(0,1)≈0，赋曲线以狭窄的宽度，可将该曲线可视化。

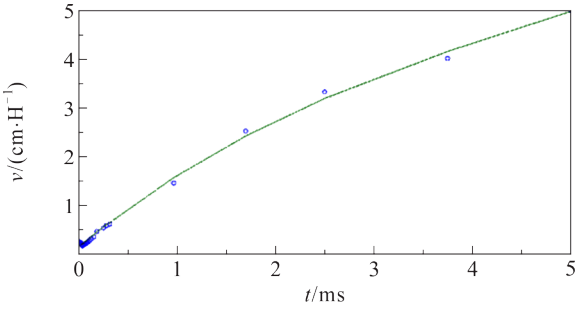


图 2 磁阻率的曲线拟合

Fig.2 Curve fitting effect of magnetic reluctance

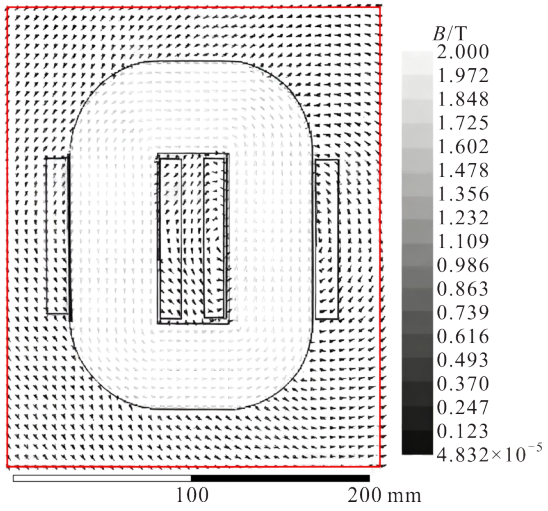


图 3 变压器内外磁感应强度 B

Fig.3 Inductance intensity B of inside and outside the transformer

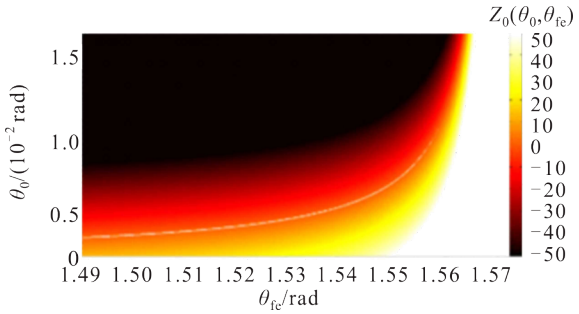


图 4 铁芯内外磁感线夹角

Fig.4 Angle between inner and outer magnetic induction lines of iron core

降维：为判断 $Z_0(\theta_{fe},\theta_0)=0$ 变化趋势，若 θ_{fe} 已知，则可将二元函数 $f(\theta_{fe},\theta_0)$化为一元函数 $\theta_0(\theta_{fe})$，即 $f(\theta_{fe},\theta_0)=\tan\theta_{fe}/\mathrm{tg}\theta_0=\mu_{fe}/\mu_0\rightarrow\theta_{fe}=\arctan((\mu_{fe}/\mu_0)\tan\theta_0)=f(\theta_0)$，即 $f(\theta_{fe},\theta_0)\rightarrow f(\theta_{fe})$，以便从不同视野深入分析。

约束：θ_{fe} 与 B_r 强相关，为逐步缩小寻觅 θ_{fe} 的范围，可以约束式(11)的变量值域。

本节还有以下提示：

1）因 $\tan\theta_{fe}/\tan\theta_0=\mu_{fe}/\mu_0$，$\theta_{fe}$ 左$\rightarrow\pi/2$，而其条件数 $C(\theta_{fe})\rightarrow\infty$，$\tan\theta_{fe}$ 呈病态，$\mathrm{d}(\tan\theta_{fe})/\mathrm{d}\theta_{fe}$ 和$\partial Z_0/\partial\theta_{fe}$均凸变，故可舍去图 4 中 $\theta_{fe}>1.54$ rad 区域。

2） $Z_0(\theta_{fe},\theta_0)=0$ 的 $\theta_{fe}<1.54$ rad 区域近似平行于横轴，即在 $\theta_{fe}\in(1.49\ \mathrm{rad}, 1.54\ \mathrm{rad})$有$\partial Z_0/\partial\theta_{fe}<<\partial Z_0/\partial\theta_0$，故该区域为求解式(1)和式(11)的可行区域。

3）强调 θ_0 右$\rightarrow0$，不拘泥 θ_0 的具体数值，有利于据 $\tan\theta_0/\tan\theta_{fe}=\mu_0/\mu_{fe}$ 式缩小 θ_{fe} 的值域。

1.2.3 再折射定理

从图 4 、式(1)和式(11)觅得解析解如下：

1）假设紧贴取向硅钢片附着一层典型薄软铁片，让铁芯中的径向磁感线经过虚拟软铁再扩散至空气中，则可望间接求得式(1)和式(11)的解析解。

2）记 3 种磁导率依次为 μ_1、μ_2、μ_3；两界面为 L_1、L_2，$L_1//L_2$；两界面法线为 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$，3 簇磁感线与 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 的夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_2'、θ_3，且有 $\theta_2=\theta_2'$。

3）为区分取向硅钢片和典型纯铁，在虚拟纯铁中 θ_2、θ_2' 可记为 θ_{fe}，μ_2 可记为 μ_{fe}，而在铁芯取向硅钢片中 θ_1 可依取向记为 θ_q，μ_1 也可记为 μ_q。

据此可得图 5。进一步分析可知，若 θ_1 和 θ_3 的关系与 μ_2 无关，则可方便求解 θ_1。

定理 1——在铁芯与非铁磁质之间，嵌入典型铁磁质薄片，则原入射角、折射角不变。

证明：因 $\tan\theta_0/\tan\theta_{fe}=\mu_0/\mu_{fe}$，图 5 有 $L_1//L_2$、$n_1//n_2$、若忽略铁磁质薄片损耗，则有 $\theta_2=\theta_2'$；又因为 $H_{3t}=H_3\sin\theta_3=H_{2t}=H_2\sin\theta_2$，$B_2=\mu_2\mu_0H_2$，$B_3=\mu_3\mu_0H_3$，故可得 $B_{3n}=B_3\cos\theta_3=B_{2n}=B_2\cos\theta_2$，$\tan\theta_2'/\tan\theta_3=\mu_2/\mu_3$，$\tan\theta_1/\tan\theta_2=\mu_1/\mu_2$，$\tan\theta_2/\tan\theta_3=\mu_2/\mu_3$；左右相乘得：

$$\tan\theta_1/\tan\theta_{fe}=\mu_1/\mu_{fe}\ \text{或}\ \tan\theta_0/\tan\theta_{fe}=\mu_1/\mu_{fe} \quad (12)$$

即 θ_1 和 θ_3 或与纯铁薄片的 μ_2 无关。证毕。

1.3 漏磁能密度

漏磁感线：B_{fe} 线径向分量 $B_r=B_{fe}\sin(0.5\pi-\theta_{fe})$，而$(0.5\pi-\theta_{fe})$为 B_{fe} 线与界面的夹角。

软铁折射角：若嵌入 $\mu_{fe}=7\ 000\mu_0$、$\theta_{fe}=1.48$rad、空气 B 线与法线夹角 $\theta_3=\theta_0=0.001\ 64$rad 的软铁[22]如图 5 所示，则有 $\tan0.001\ 64/\tan1.48=1/7\ 000$，$B$ 线以与 L_2 为$(0.5\pi-1.48)$rad 的弧通过软铁，据定理 1 可知软铁不会影响原硅钢片 B 线入射角和空气出射角。

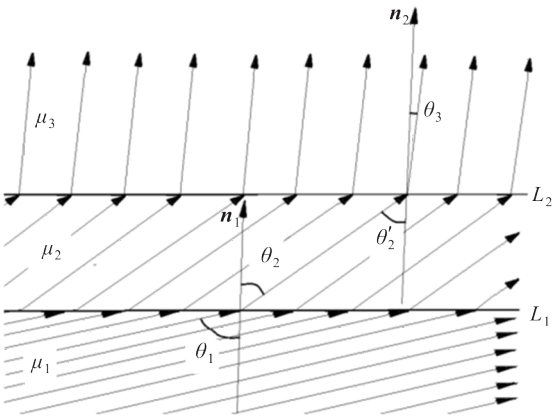


图 5 穿越 3 种磁介质的 B 线

Fig.5 B-lines crossing three types of magnetic media

硅钢折射角：将式(5)中 $v_{\sim}$、式(10)中 $\mu_q=9\ 500$ 代入图 5 的 μ_1，由式(12)$\tan\theta_{fe}/\tan\theta_q=7\ 000/9\ 500$ 得到 B 线与 L_1 的夹角为$(0.5\pi-\theta_1)=0.064\ 8$rad，$\theta_q=1.506$rad；$\cos\theta_q\approx0.065$，即 6.5%的 B 线自铁芯径向扩散；结合图 4 有 $\theta_q=\theta_1\in(1.49,1.54\mathrm{rad})$，用定理 1 可求有用解。

漏磁能密度 w_n：B_{fe} 的法向分量 $B_{fen}=B_{fe}\cos\theta_{fe}$ 为空气侧 B_0 的法向分量 $B_{0n}=B_0\cos\theta_0$，即 $B_{0n}=B_{fen}$。另据式(1)$w=0.25v_{\sim}B_m^2$，故与 B_{fen} 对应的磁能密度 w_n 可用 B_{fen} 的最大值 B_{mfen} 及其夹角 θ_{fe} 来表达。

$$w_n=0.25v_{\sim}B^2_{mfen}=0.25v_{\sim}B^2_{mfen}\cos^2\theta_{fe} \quad (13)$$

由 w_n 可得到漏磁能及其与之对应的漏感

定义 2：铁芯漏感——对应于铁芯漏磁能的漏感。

2 铁芯漏感的算例

记铁芯截面积 A_m、窗口面积 A_w、矩形系数 K 为决策变量，以函数簇 $f_i(A_m, A_w, K)$表漏感，见图 6—8。

2.1 铁芯的几何表达

定义 3：矩形系数 K——正方形面积为 A_w，同面积矩形长、宽各为 $KA_w^{0.5}$、$A_w^{0.5}/K$，面积仍为 A_w。

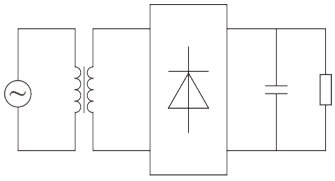


图 6 变压器及其负载

Fig.6 Transformer and load

铁芯半径 r_m，圆环胎半径 R_m，$R_m \approx r_m=(A_m/\pi)^{0.5}$，故圆环胎 $L_{feC}=2\pi(A_m/\pi)^{0.5}=3.54A_m^{0.5}$，铁芯窗口宽 $A_m^{0.5}/K=h_c/2$ 为磁轭直线部分，h_c 为两磁轭直线部分。

芯柱长：$L_{feW}=KA_m^{0.5}\approx L_p\approx L_s$，初次级绕组高度、厚度分别为 L_p、L_s、b_p 和 b_s，因基于芯柱的径向磁通又汇集于绕组和主铰链，故 L_{feW} 在铁芯磁路长 MTL 中的占比越大，基于铁芯的漏磁通及其对应漏感也越小。

磁轭长：$L'_{fe}=A_w^{0.5}/K+L_{feC}$，$L'_{fe}$ 越长，扩散的径向漏磁能量越大，对应的铁芯漏感也越大。

磁路长：MTL 为芯柱长 L_{feW} 与磁轭长 L'_{fe} 之和。

$$L_{MT}=L_{feW}+L'_{fe}=2KA_w^{0.5}+2A_w^{0.5}/K+3.54A_m^{0.5} \tag{14}$$

平均匝长：MLP 为半径 $R=r_m+0.5A_w^{0.5}/K$ 的周长。

$$L_{MP}=2(r_m+0.5A_w^{0.5}/K)\pi \tag{15}$$

例：1 kVA、480/220/ V 或 380/220/ V、50 Hz 单相变压器，波形系数 K_f=4.44、电容 C=4 700 μF、漏感为 L_f=46 mH，电流密度 J=265 A/cm^2、窗口系数 K_{cu}=0.5、最大磁感应强度 B_{max}=1.8 T，叠片系数 K_{fe}=0.95，圆环胎中线长 L_{feC}，磁路长 L_{fe}，磁轭长 L'_{fe} 由窗口宽 $2A_m^{0.5}/K$ 和圆环胎中线长 $3.54A_m^{0.5}$ 构成，即：

$$L'_{fe}=2A_w^{0.5}/K+3.54A_m^{0.5} \tag{15}$$

铁芯体积 $V_{fe}=A_mL_{fe}$，将式(14)代入有：

$$V_{fe}=2KA_mA_w^{0.5}+2A_mA_w^{0.5}/K+3.54A_m^{1.5} \tag{16}$$

与铁芯漏磁强相关联的磁轭体积 $V'_{fe}=L'_{fe}A_m$：

$$V'_{fe}=2A_mA_w^{0.5}/K+3.54A_m^{1.5} \tag{17}$$

此外，在多相整流变压器中，同相的初、次级绕组常置于同一芯柱，其漏感为同心变压器漏感；然而，在换相瞬间，因所涉及到的两相绕组分处于不同的芯柱，故客观上相当于分离绕组漏感。

2.2 漏感的表达和值域的渲染

用 4D 技术展现漏感的数值分布，有利于将漏感的计算结果融入到变压器优化设计过程中[3]。

2.2.1 瓦片状的容量集

变压器功率 S 为总电流 I'和磁通 Φ 之积：初、次级总容量标幺值为 1+1=2、损耗为 0.05，可得：

$$S=fK_fI'\Phi=0.000\ 1fK_fJK_{cu}A_wB_{max}K_{fe}A_m/2.05=2.45A_mA_w=S_{1k}(A_m,A_w) \tag{18}$$

容量弧集：$S_{1k}(A_m,A_w)\in[1,1.1]$ kVA 见图 9。

图中颜色对应色杆的 0.12，再乘 8 388 即可得到 1 kVA。

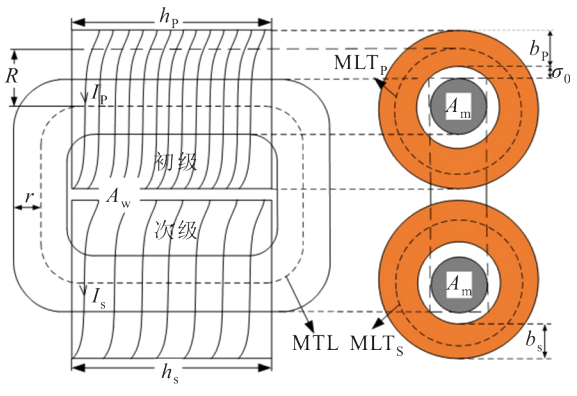


图 7 分离绕组结构

Fig.7 Configuration of a non-concentric winding transformer

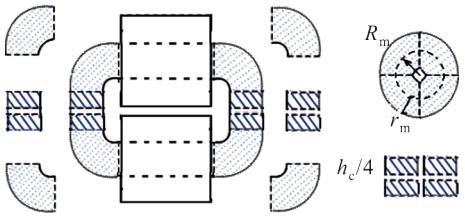


图 8 R 型铁芯拆解图

Fig.8 Diagram of R-cores disassembly

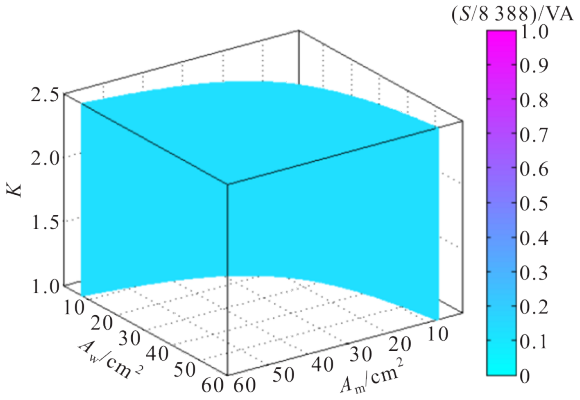


图 9 1 kVA 容量弧集 $S_{1k}(A_m,A_w,K)$

Fig.9 1 kVA capacity arc set $S_{1k}(A_m,A_w,K)$

2.2.2 基于铁芯的漏感

磁密幅值 B_{mfe}：励磁电流 I_m、匝数 N_p，有：

$$B_{mfe}=B_{max}=2^{0.5}N_pI_m/(v_{\sim}L_{fe}) \tag{19}$$

据此可得励磁电流约束 $I_m\leq 0.012\ 7v_{\sim}L_{fe}/N_p$。

漏磁能 W_{fen}：B_{mfe} 的径向分量 $B_{mfen}=B_{mfe}\cos\theta_{fe}$，漏磁能密度 $w_n=0.5v_{\sim}w_n=0.5v_{\sim}B_{mfen}^2V'_{fe}\cos^2\theta_{fe}$，得：

$$W_{fen}=w_nV'_{fe}=5\times10^{-7}v_{\sim}B_{mfe}^2V'_{fe}\cos^2\theta_{fe} \tag{20}$$

初级匝数 N_p：对应初级电压 U_{prms}=480 V，有：

$$N_p=U_{prms}/(0.000\ 1fK_fB_{mfe}K_{fe}A_m)=12\ 644/A_m \tag{21}$$

铁芯漏感 L_{lfe}：其中能量 $W_{lfe}=0.5L_{lfe}I_m^2=W_{fen}$；

将式(19)代入式(20)得 W_{fen}，各自 I_{m}^2 项抵消后，有：

$$L_{1\mathrm{fe}}=2\times10^{-6}k_{\mathrm{sp}}[N_{\mathrm{p}}^2/(\nu_{\sim}L_{\mathrm{fe}}^2)]V'_{\mathrm{fe}}\cos^2\theta_{\mathrm{fe}} \quad (22)$$

式中：V'_{fe}、L_{fe} 取自式(17)、式(14)，$\nu_{\sim}$=82 m/H 源自式(8)，铁芯折射角余弦 $\cos\theta_{\mathrm{fe}}=\cos1.506\approx0.065$。

折算漏感 $L'_{1\mathrm{fe}}$：初、次级电压为 U_{P}=480 V、U_{S}=220 V，$k_{\mathrm{sp}}=(U_{\mathrm{S}}/U_{\mathrm{P}})^2$，用 $L'_{\mathrm{Lfe}}=k_{\mathrm{sp}}L_{\mathrm{Lfe}}$ 折算到次级：

$$L'_{\mathrm{Lfe}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)=2.2\times10^{-11}(N_{\mathrm{p}}^2V'_{\mathrm{fe}})/L_{\mathrm{fe}}^2 \quad (23)$$

式(23)可视化见图 10。铁芯漏感 $L_{\mathrm{Lfe}}\in(9,27)$ mH，其在同类变压器漏感中已不容忽略[5-8]，图中条状色谱是为了辨识细微部分，实际上是连续变化的[3]。

2.2.3 铁芯漏感的占比

变压器总漏感 L_{Lt} 包括基于初次级绕组的漏感 L_{L}(如后续图 19 所示)与基于铁芯的漏感 L_{Lfe} 之和，而 L_{Lfe} 在 L_{Lt} 中的占比 $L_{\mathrm{Lzb}}=L_{\mathrm{Lfe}}/L_{\mathrm{Lt}}$ 如图 11 所示。

从优化设计所得集状决策变量中提取点状解为 A_{m}=20.5 cm^2、A_{w}=20.5 cm^2、K=1.8，可知本例铁芯漏感约占分离绕组变压器总漏感的一半。

3 绕组本体的漏感探讨

绕组既有轴向磁场又有径向磁场，其表达式源自螺线管模型和单圆环模型，本章强调径向磁场。

3.1 载流单圆环的轴向径向磁场

分离式绕组两轴线平行、初次级绕组间距约为 2 倍磁轭长度[4]，而磁轭长有利于径向磁场的扩散。

3.1.1 绕组本体的磁感应强度

用 Ansoft 得到单绕组本体的磁场分布如图 12。图中，$\boldsymbol{B}$ 线既有轴向分量 $\boldsymbol{B}_x$，又有径向分量 $\boldsymbol{B}_r$，在几何中点 $\boldsymbol{B}_x$ 密度最大 $\boldsymbol{B}_r$ 密度最小，两端面附近，$\boldsymbol{B}_x$ 变化率和 $\boldsymbol{B}_r$ 变化率均较大。$\boldsymbol{B}$ 线穿越绕组两端面内的圆柱侧面，或穿越两虚拟端面(两端面沿轴线等距外移，恕稍后讨论)间的圆柱侧面而闭合。

3.1.2 单匝载流体的磁场强度

绕组径向磁场较难表达[22]，而描述绕组的螺线管模型源自单匝载流体，圆环中恒定电流 I 所产生的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 如图 13 所示。记单匝载流体圆心为 0，半径为 R，轴线上任意点为 P，电流元 $\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 所在点 A 与 P 点距离 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 与 0 A 的夹角为 a，$\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 在 P 点的磁场强度元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 构成平面，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$ 垂直于该平面，并位于另一平面上，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}=\mathrm{d}\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{r}$ 所在平面与 x 轴的交点 P，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{Px}}$ 为场强元 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$ 的轴向分量、$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{PR}}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$ 的径向分量，Q 为垂足。$\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 在 P 点产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{Px}}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{PR}}$ 如式(24)所示。

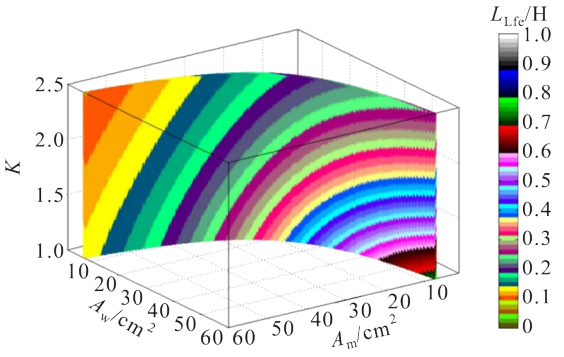


图 10 基于铁芯的漏感分布 $L'_{\mathrm{Lfe}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$

Fig.10 Leakage inductance L'_{Lfe} based on iron core $L'_{\mathrm{Lfe}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$

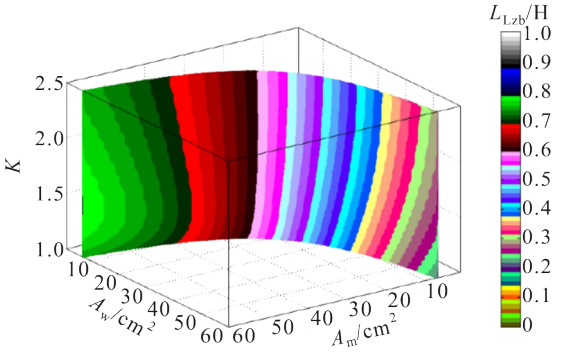


图 11 铁芯漏感在 $L_{\mathrm{lt}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$中的占比 $L'_{\mathrm{lfe}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$

Fig.11 The proportion of $L'_{\mathrm{lfe}}(A_m,A_w,K)$ in $L_{\mathrm{lt}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$

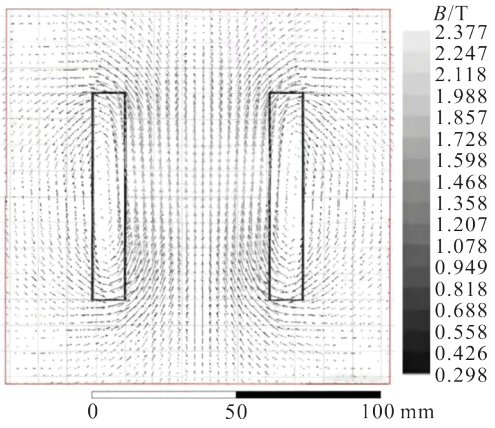


图 12 空心螺线管绕组磁感应强度 B

Fig.12 Magnetic induction intensity B of hollow solenoid winding

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}=\dfrac{I\mathrm{d}\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^2},\ \mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{Px}}=\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}\cos a=\boldsymbol{x}\dfrac{I\cos a}{4\pi r^2}\mathrm{d}\boldsymbol{g}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{PR}}=\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}\sin a=\boldsymbol{R}\dfrac{I\sin a}{4\pi r^2}\mathrm{d}\boldsymbol{g}\end{cases} \quad (24)$$

轴向场强微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{Px}}$：圆周上诸微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 在 P 点轴向磁场强度的累积。

单圆环轴向场强 $\boldsymbol{H}_{Px}$：式(24)中 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{Px}$ 闭环积分：

$$\boldsymbol{H}_{Px}=\oint \mathrm{d}\boldsymbol{H}_{Px}=\frac{\boldsymbol{I}\sin^2 a\cos a}{4\pi r_0^{\,2}}\oint \mathrm{d}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{x}\frac{2\pi RI\sin^2 a\cos a}{4\pi r_0^{\,2}}=\boldsymbol{x}\frac{0.5R^2I}{(R^2+r_0^2)^{1.5}} \tag{25}$$

径向场强元 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{PR}$：$\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 在 P 点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{PR}$、过 A 的直径另端 $\mathrm{d}\boldsymbol{g}'$在 P 有 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_{PR}=-\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{PR}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{PR}+\mathrm{d}\boldsymbol{H}'$而 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{Q}$ 沿圆环径向扩散，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{PR}$ 不能表达 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{Q}$，将 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{Q}$ 转为轴向，以 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{PR}=\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{Q}$ 在轴线比照 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{Px}$ 积分，既有径向 $\boldsymbol{H}_{PQ}$，又能与 $\boldsymbol{H}_{Px}$ 比较数值分布。

圆环径向场强 $\boldsymbol{H}_{PQ}$：对式(24)中 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{PR}$ 闭环积分如式(26)所示。

$$\boldsymbol{H}_{PQ}=\oint \mathrm{d}|\boldsymbol{H}_{PR}|=\frac{\boldsymbol{I}\sin^3 a}{4\pi r_0^{\,2}}\oint \mathrm{d}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{R}\frac{2\pi RI\sin^3 a}{4\pi r_0^{\,2}}=\boldsymbol{R}\frac{0.5r_0RI}{(R^2+r_0^2)^{1.5}} \tag{26}$$

对微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 产生的径向磁场强度微元 $\mathrm{d}|\boldsymbol{H}_{PR}|$环路积分，可量化源自载流圆环的径向磁场强度 $\boldsymbol{H}_{R}$。

3.2 绕组本体磁感线及其电感

将圆环闭环积分所得轴、径向磁场强度 $\boldsymbol{H}_{Px}$、$\boldsymbol{H}_{PQ}$ 化作轴、径向微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{x}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{R}$，再沿轴线积分可分别得绕组的轴、径向磁场强度 $\boldsymbol{H}_{x}$、$\boldsymbol{H}_{R}$。

3.2.1 绕组的轴向磁场强度

为分析图 12 绕组内外 H 分布，据文献[22]得到图 14，并记绕组场点坐标 x 的中点为 0、绕组长 L、半径 R、绕组某边缘到轴向中点距离为 l、该边缘至线圈距轴上某关注点 P 的距离为 r，匝数为 N，单位长匝数 $n=N/L$，线元 $\mathrm{d}l$ 总效果是一匝的 $n\mathrm{d}l$ 倍，P 点的 H 为各匝绕组共同作用，即图 13 点 0 至点 P 的距离 r_0 对应着图 14 的 x–l 为所关注载流圆环微元，另有 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}l$。

$\boldsymbol{H}_{x}(l)$和 $\boldsymbol{H}_{x}(\beta)$：$l\in[-L/2,L/2]$，P 点轴向元磁场强度 $\mathrm{d}H_x$ 源自式(24)，将微元从绕组微长 $\mathrm{d}l$ 换成微角度 $\mathrm{d}\beta$，则距离 r、三角式和磁场强度 H_x 微积分为：

$$\begin{cases}\mathrm{d}H_x=x\dfrac{R^2In}{2(R^2+(x-l)^2)^{3/2}}\mathrm{d}l\\ r=(R^2+(x-l)^2)^{0.5}=R\csc\beta,\ x-l=r\cos\beta,\ \mathrm{d}l=R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta\end{cases} \tag{27}$$

$$H_x(\beta)=\frac{nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\mathrm{d}\beta=\frac{nI}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2) \tag{28}$$

当 $l=\pm0.5L$ 时，场点坐标 x 与 β 的关系为：$\cos\beta_1=\dfrac{x+0.5L}{\sqrt{R^2+(x+0.5L)^2}}$，$\cos\beta_2=\dfrac{x-0.5L}{\sqrt{R^2+(x-0.5L)^2}}$。

轴向磁场强度的表达式说明如下：

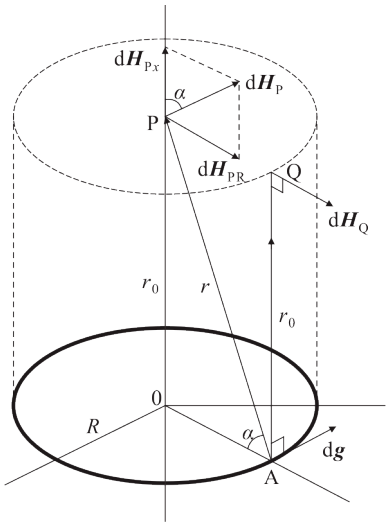


图 13 载流单圆环的磁场分量

Fig.13 Magnetic field component of single circular coil

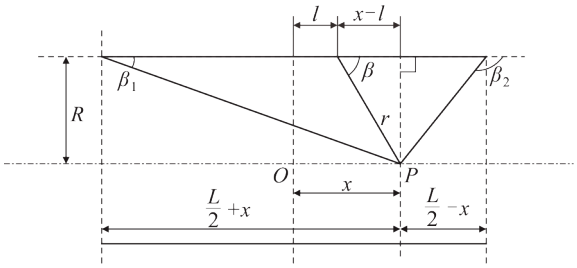


图 14 螺线管的磁场强度

Fig.14 Magnetic field strength of solenoid

1）若 R 已定，$\boldsymbol{H}_{x}(l)$随 l 而变，改变绕组长径比 L/R 可改变绕组场强分布；若 N、L 和 R 已定，则 $\boldsymbol{H}_{x}(x)$随 x 而变，当 $x=0$ 时有最大值 $H_x(0)=H_{x\max}$。

2）轴向 B 线 $B_x(x)=\mu H_x(x)$，绕组 B 线一进一出贯穿于绕组两端面，即$|B_x(-0.5L)|=|B_x(0.5L)|$。

3）由图 12、13 和式(26)—(28)可知，沿 x 轴积分既可表达轴向磁场 $H_x(x)$，也可表径向磁场 $H_R(x)$。

4）$\boldsymbol{H}_{x}(x)|\boldsymbol{H}_{x}(l)\rightarrow\boldsymbol{H}_{x}(\beta)$；$\boldsymbol{H}_{R}(x)|\boldsymbol{H}_{R}(l)\rightarrow\boldsymbol{H}_{R}(\beta)$。

3.2.2 轴向磁感应强度分布

据图 14 和式(24)、式(25)，若令绕组长度 L 不变而改变绕组半径 R，以长径比 L/R 为变量，则曲线图簇会给判断 B 线沿绕组轴向的数值分布带来便利。

1）以 L=20 cm 为基准，两端面位于 $x=-10$ cm、x=10 cm 处，改变 R 可调整 L/R。

2）曲线 F 为 L/R=100，足够细长时两端面间的 B_x 为基准 1，$H=NI/L=nI=H_{\max}$。

3）曲线 K 为 L/R =0.5，L/R 越小、B_x 越小，两端面附近 B_x 衰减，曲线 A、H、B 论述略。

4）暂以长径比 L/R=0.5、1、2、10、100 的诸特殊点进行比较，且 L/R=100 代表无限长绕组。轴向磁感应强度与绕组长径比的关系见图 15。

3.2.3 径向磁场强度

据图 13、14 和式(26)，绕组每匝都对点 P 有 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$，而 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$ 化作 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$ 再沿轴线对 $l\in[-L/2,L/2]$积分：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{R}\frac{0.5(x-l)RIn}{(R^2+(x-l)^2)^{3/2}}\mathrm{d}l \tag{29}$$

$$\boldsymbol{H}_R=\boldsymbol{R}\int_{-0.5L}^{0.5L}\frac{0.5(x-l)RIn}{(R^2+(x-l)^2)^{1.5}}\mathrm{d}l \tag{30}$$

$r=(R^2+(x-l)^2)^{0.5}=R\csc\beta$，$\sin^2\beta=R^2/(R^2+(x-l)^2)$，$\mathrm{d}l=R\cdot\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$，$x-l=r\cos\beta$，故有：

$$\begin{cases}H_R(\beta)=\dfrac{nI}{2}\displaystyle\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta\mathrm{d}\beta=\frac{nI}{2}\left(\sin\beta_2-\sin\beta_1\right)\\ \sin\beta_1=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\left(x+0.5L\right)^2}},\sin\beta_2=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\left(x-0.5L\right)^2}}\end{cases} \tag{31}$$

$H_{\mathrm{R}}(0)$=0 至两端 $x=\pm L/2$ 附近 $H_{\mathrm{R}}(x)$达最大值后再衰减，因 B_{R}~H_{R}~w_{R}，有 $w_{\mathrm{R}}(x)=\mathrm{d}W_{\mathrm{R}}/\mathrm{d}v$，$W_{\mathrm{R}}$ 为与 B_{R} 对应的磁能，v 为体积。

3.2.4 绕组本体的轴/径向磁场

兹分别研判绕组本体的轴、径向磁场变化。

定理 2：螺线管绕组的磁感线都有径向分量

证明：磁感线是不交叉且闭合的[22]，而轴线是无径向分量不闭合且无限长的，唯有含径向分量的磁感线才能返回绕组另一端构成闭合回路，没有磁感线能与轴线重合，故磁感线都有径向分量。

B_r 线穿绕组圆筒及其延长面形成闭合回路。

定义 4：虚拟端面——将绕组两端面分别平移至轴线 $x=\pm1.5L$ 处，面积仍为 $R^2\pi$。

定义 5：轴向漏感线 $\boldsymbol{B}_x$——贯穿垂直于轴线的两虚拟端面、且数量相等的 $\boldsymbol{B}_x$ 线簇。

$\boldsymbol{B}_x$ 线簇密度在绕组正中间最高，逐渐向两端面降低，经虚拟端面后迅速衰减趋零。

定义 6：径向漏感线 $\boldsymbol{B}_r$——穿越绕组轴线外两虚拟端面之间的圆筒柱面的 B_r 线簇。

B_r 线密度自绕组正中零点起至两端面附近逐渐增加，过两虚拟端面后迅速衰减并趋零。

3.2.5 内自感和外自感

定义 7：内自感——对应轴向漏感线的电感 L_{l}。

1）轴向漏感线簇源自定义 4，轴向磁链 $\boldsymbol{\Psi}_x$ 贯穿面积 $S_x=R^2\pi$ 的两虚拟端面。

2）无限长绕组的内自感 $L_x=\Psi_x/I$，符合电感为磁链与电流之比 $L=\Psi/I$ 的基本定义[5-8,22]。

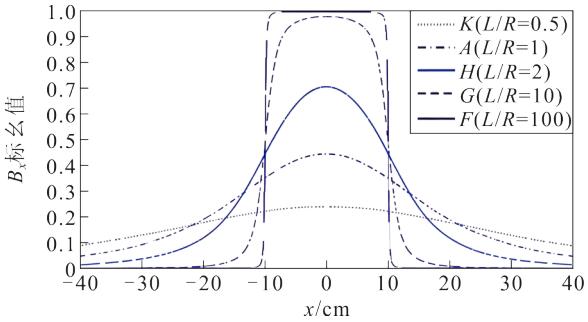


图 15 磁感应强度 B_x 与 L/R 的关系

Fig.15 Relationship between flux density and L/R

3）因 $L_{\mathrm{L}}=\Psi_x/I=N\Phi_x/I=NB_xS/I=N\mu H_xS/I$，$n=N/L$，磁场强度 $H=(NI)/L$，绕组体积 $V=SL=R^2\pi L$，故有 $L_{\mathrm{L}}=\mu_0n^2V$，这也符合电感另一表达式[5-8,22]。

定义 8：外自感——对应径向磁感线的电感 L_r。

1）$\boldsymbol{B}_r$ 贯穿圆柱面 $S_r=3LR\pi$ 得径向磁链 Ψ_r。

2）在 0 点有 $\Psi_r=0$，$\Psi=\Psi_{x\max}$ 恰似无限长螺线管，其磁感线皆为轴向且构成内自感 $L_{\mathrm{L}}=\Psi_{x\max}/I$；但自 0 点起$|\Psi_x(x)|$在减少，其减少的部分正是$|\Psi_r(x)|$。绕组自感 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_x+\boldsymbol{L}_r$，而 $L_x=\Psi_x/I$，$L_r=\Psi_r/I$。

3.3 绕组本体的磁能密度

定义 9：轴向磁能密度、磁能——与轴向磁感应强度 B_x 对应的磁能密度 w_x 及其磁能 W_x。

定义 10：径向磁能密度、磁能——与径向磁感应强度 B_r 对应的磁能密度 w_r 及其磁能 W_r。

3.3.1 与 B_x 对应的磁能密度 w_x

与 B_x 对应的磁能密度 w_x 源自其定义，能量 W_x 体积 v 的微分 $w_x=\mathrm{d}W_x/\mathrm{d}v=0.5B_x^2/\mu$，亦可表达为：

$$w_x=0.5\mu H_x^2(\beta)=0.125\mu n^2I^2\sin^2\beta \tag{32}$$

式中：$H_x(\beta)=0.5nI\sin\beta$ 源自式(28)的被积函数，而据磁能元 $\mathrm{d}W_x=w_x\mathrm{d}v$ 可求出对应的磁能。

图 15 将 L/R=100 近似为无限长螺线管，$B=B_{\max}$，将对应的磁能密度最大值 w_x 定为基准 1，可得磁能密度 $w_x(L/R)$曲线；若基于 E、R 型铁芯数据集[5-8]并兼顾常用非标铁芯[3,22]，当 $0.5\le L/R\le4$ 时有图 16。

$w_x(L/R)$所围面积超 90%在$-1.5L\le x\le1.5L$ 或本例 −30 cm≤x≤30 cm 的两虚拟端面之间。

3.3.2 与 $\boldsymbol{B}_r$ 对应的磁能密度 w_r

螺线管模型的径向磁场 $B_r(x)$较复杂[22]，其对应的磁能密度 $\mathrm{d}W_r/\mathrm{d}v=w_r(x)=0.5B_r^2/\mu$，试探究如下：

1）从式(31)可得被积函数 $0.5nI\cos\beta$。

2）令 L 不变而改变 R，以 L/R=100 代表无限长绕组，且仍以其 $w_x(L/R)=w_x(100)$的幅值为基准 1。

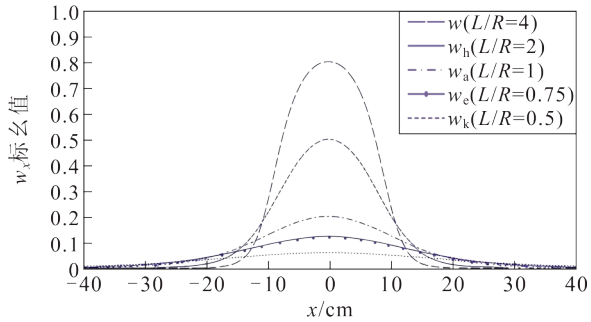


图 16 磁能密度(I)与常用 L/R 的关系 $w_x(L/R)$

Fig.16 Relationship between magnetic energy density(I) and commonly used $w_x(L/R)$

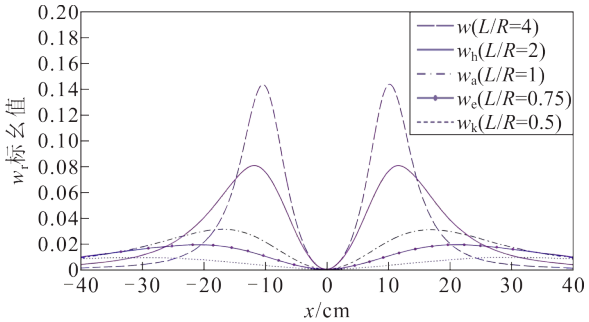


图 17 磁能密度(II)与长径比 L/R 的关系 $w_r(L/R)$

Fig.17 Relationship between magnetic energy density(II) and commonly used L/R

3）各 $B_x(L/R)$对应的 $w_r(L/R)$见图 17，其纵轴区间改为(0,0.2)，以区分细微处的差异，并分别标注磁能密度(I)、磁能密度(II)以便于相互比较。

$w_r(L/R)$簇约在两端面附近达到幅值后迅速衰减；B_r 贯穿半径为 R 的绕组圆筒壁，也是 $w_r(x)$簇的零位；$w_r(x)$所围面积远小于图 16 的 $w_x(x)$所围面积。映射为幅值的 $w_r(x)$可表示为：

$$w_r(L/R)\sim w_r(\beta)=0.5\mu_0 H_R^2(\beta)=0.125\mu_0 n^2 I^2\cos^2\beta \quad (33)$$

3.3.3 两磁能密度的比较

图 17、式(33)为对应的径向磁能密度，图 16、17 为在诸 L/R 下 w_x、w_r 所围面积 A_x、A_r，不同长径比下，分离绕组的轴、径向磁能密度的标幺值见表 1 。

因为 $A_r/A_x\approx1/4$，故 A_r、H_r 和 w_r 均不能被忽略，与之对应的漏感也不能被忽略。

3.3.4 绕组总的磁能密度

总漏磁能密度 $w(x)=w_x(x)+w_r(x)$，取 $L/R=4$，$w(x)$、$w_x(x)$、$w_r(x)$见图 18，$w(x)$立体图见附录 B 。

由图 18 可见，各 $w(x)$所围面积 $A(x)$几乎都是由–30 cm≤x≤30 cm(–1.5L≤x≤1.5L)所贡献，故以该区间两端为积分上下限和两虚拟端面的位置。

3.4 绕组本体的漏磁能

绕组的 B、w 和磁能体积都是场点函数[22]。

3.4.1 轴向磁能体积

定义 11：轴向磁能半径——基于绕组轴线且与 $w(\beta)$对应的桶形体半径 $r_{em}(\beta)$。

磁能密度最大值映射为绕组半径，$w_{xmax}\to R$，有：

$$\forall w_i\in W,\exists!r_{em}\in R_{em}[(w,r_{em})\in f] \quad (34)$$

任选磁能密度集 W 的某能量密度 w_i，其磁能半径集 R_{em} 中有唯一磁能半径 r_{emi}，w_i 和 r_{emi} 可以用函数 f 表达，而 W 和 R_{em} 为非负集合。对应的磁能圆面积 $A_{em}(\beta)=\pi r_{em}^2(\beta)$。

表 1 轴、径向磁能密度曲线所围等效面积

Table 1 Curves of equivalent area enclosed by axial and radial magnetic energy density

L/R	A_x	A_r	A_r/A_x
4	13.41	2.77	0.21
2	9.35	2.49	0.27
1	5.43	1.43	0.26
0.75	4.13	0.97	0.23
0.5	2.65	0.45	0.17

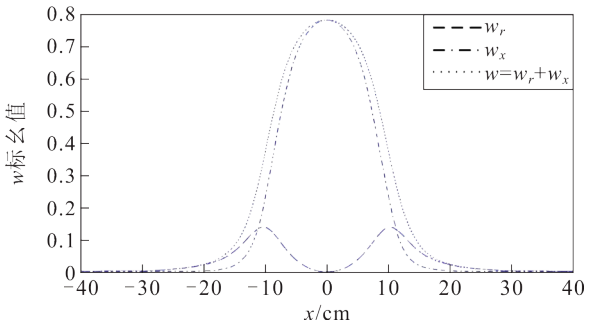


图 18 轴向、径向和绕组磁能密度

Fig.18 Axial/radial and winding magnetic energy density

定义 12：轴向磁能体积元 dv_{em}——与 $w(\beta)$所涉空间对应的桶形体积，$dv_{em}=A_{em}(\beta)dl$。

$$\forall w_i\in W,\exists!dv_{em}\in dV_{em}[(w,v_{em})\in f] \quad (35)$$

式中：dV_{em} 为磁能体积元集；dv_{emi} 为磁能体积元。

3.4.2 与 B_x 对应的磁能 W_x

轴向磁场磁能：$H_x(\beta)$源自式(28)中 $0.5nI\sin\beta$，将 $H_{max}=0.5nI$ 代入 $dW_x/dv=w_x=0.5\mu_0H^2$，有磁能半径最大值 r_{emmax}、磁能密度 $w_x(\beta)$、磁能半径 $r_{emx}(\beta)$及其对应的磁能面积 $A_{emx}(\beta)$：

$$0.125\mu_0n^2I^2\to r_{emmax}=R \quad (36)$$

$$w_x(\beta)=0.5\mu_0H_x^2(\beta)=0.125\mu_0n^2I^2\sin^2\beta \quad (37)$$

$$r_{emx}(\beta)=r_{emmax}\sin^2\beta=R\sin^2\beta \quad (38)$$

$$A_{emx}(\beta)=\pi r_{emx}^2(\beta)=\pi R^2\sin^4\beta \quad (39)$$

$\mathrm{d}W_x=w_x\mathrm{d}v_{em}=w_xA_x\mathrm{d}l$，$\mathrm{d}l=R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$，而依式(27)、(28)、(33)—(35)，可得绕组轴向磁能的微积分：

$$\mathrm{d}W_x=0.125\mu_0n^2I^2R^3\pi\sin^4\beta\mathrm{d}\beta \tag{40}$$

$$W_x=\int_{\beta_1}^{\beta_2}0.125\mu_0n^2I^2R^3\pi\sin^4\beta\mathrm{d}\beta= 0.125\mu_0n^2I^2R^3\pi\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin^4\beta\mathrm{d}\beta=0.393\mu_0n^2I^2R^3J_x \tag{41}$$

$$J_x=\frac{3}{8}\beta_2-\frac{3}{8}\sin\beta_2\cos\beta_2-\frac{1}{4}\sin^3\beta_2\cos\beta_2-\frac{3}{8}\beta_1+\frac{3}{8}\sin\beta_1\cos\beta_1+\frac{1}{4}\sin^3\beta_1\cos\beta_1 \tag{42}$$

3.4.3 铁芯占位处对应的磁能

按图 14 和式(28)、(30)计算绕组本体漏磁能时，应减去铁芯占位体积处的磁能(即将原 μ_{fe} 换成 μ_0)。

铁芯轴向磁场强度：铁芯截面积 $A_m=r_m^2\pi$，而 $r_m=(A_m/\pi)^{0.5}$，其距离 $r=(r_m^2+(x-l)^2)^{0.5}=r_m\csc\beta_{fe}$，参阅图 14 有 $x-l=r\cos\beta_{fe}$，故 $\mathrm{d}l=r_m\csc^2\beta_{fe}\mathrm{d}\beta_{fe}$，得：

$$\begin{cases}H'_x(\beta)=\dfrac{nI}{2}\int_{\beta_{fe1}}^{\beta_{fe2}}\sin\beta_{fe}\mathrm{d}\beta_{fe}=\dfrac{nI}{2}\left(\cos\beta_{fe1}-\cos\beta_{fe2}\right)\\ \cos\beta_{fe1}=\dfrac{x+0.5L}{\sqrt{(A_m/\pi)+(x+0.5L)^2}}\\ \cos\beta_{fe2}=\dfrac{x-0.5L}{\sqrt{(A_m/\pi)+(x-0.5L)^2}}\end{cases} \tag{43}$$

$0.5nI\sin\beta_{fe}=H_x(\beta_{fe})$为铁芯占位处的被积函数，故应将 μ_{fe} 换成 μ_0，可得对应的磁能密度为：

$$w_{mx}=0.5\mu_0H_x^2(\beta_{fe})=0.125\mu_0n^2I^2\sin^2\beta_{fe} \tag{44}$$

$\mathrm{d}W_{mx}=w_{mx}\mathrm{d}v=w_{mx}A_{mx}\mathrm{d}l$，将式(43)代入式(44)可得 $\mathrm{d}W_{mx}=(0.125\mu_0n^2I^2\sin^2\beta_{fe})A_{mx}r_m\csc^2\beta_{fe}\mathrm{d}\beta_{fe}$，则：

$$\mathrm{d}W_{mx}=0.070\,5\mu_0n^2I^2A_m^{1.5}\sin^4\beta_{fe}\mathrm{d}\beta_{fe} \tag{45}$$

令 $\mu=\mu_0$，得铁芯占位处磁能为：

$$W_{mx}=\int_{\beta_{fe1}}^{\beta_{fe2}}0.070\,5\mu_0n^2I^2A_m^{1.5}\sin^4\beta_{fe}\mathrm{d}\beta_{fe}= 0.070\,5\mu_0n^2I^2A_m^{1.5}\int_{\beta_{fe1}}^{\beta_{fe2}}\sin^4\beta_{fe}\mathrm{d}\beta_{fe}= 0.070\,5\mu_0n^2I^2A_m^{1.5}J_{fe} \tag{46}$$

$$J_{fe}=\frac{3}{8}\beta_{fe2}-\frac{3}{8}\sin\beta_{fe2}\cos\beta_{fe2}-\frac{1}{4}\sin^3\beta_{fe2}\cos\beta_{fe2}-\frac{3}{8}\beta_{fe1}+\frac{3}{8}\sin\beta_{fe1}\cos\beta_{fe1}+\frac{1}{4}\sin^3\beta_{fe1}\cos\beta_{fe1} \tag{47}$$

绕组本体轴向磁能：与绕组本体 H_x 对应的漏磁能量 W_{Lx}，为半径为 R 的圆柱体轴向漏磁能 W_x 与半径为 $r_m=(A_m/\pi)^{0.5}$ 的铁芯占位处磁能 W_{mx} 之差：

$$W_{Lx}=W_x-W_{mx} \tag{48}$$

3.4.4 径向磁分量的表达

B_r 线、$w_r(\beta)$和 $r_{mr}(\beta)$均起止于绕组筒壁或其延长圆柱面，故 R 与式(31)、式(38)、定义 11 轴向磁能半径相关：$H_r(\beta)=0.5nI\cos\beta$、$w_{xmax}=0.125\mu_0n^2I^2\to R$，如前所述，并参阅附录 A 的立体图，可以逐步得到

定义 13：径向磁能幅度 $s_{em}(\beta)$——基于绕组圆筒或其延长面，且与 $w_r(\beta)$对应的幅度。

$w_r(\beta)$与轴向磁能密度最大值 w_{xmax} 之比，映射为对应于 R 的磁能幅度$(w_r(\beta)/w_{xmax})R\to s_{em}(\beta)$时，有：

$$\forall p_{ri}\in P,\ \exists!s_{em}\in S_{em}[(p_{ri},s_{em})\in f] \tag{49}$$

式中：$p_{ri}=w_r(\beta_i)/w_{xmax}$ 为 $w_r(\beta_i)$与 w_{xmax} 之比；P 为比值集；S_{em} 为磁能幅度集；s_{emi} 为某磁能幅度。

基于绕组轴线的线段：式(32)中 $w_x(\beta)$的幅值 $0.125\mu_0n^2I^2$ 映射的是基于绕组轴线、其最大值为绕组半径 R，自变量为 β 的射线 $r_{em}(\beta)$。

基于圆筒壁的线段：式(33)中 $w_r(\beta)$的系数也是 $0.125\mu_0n^2I^2$，但映射的却是半径 R 的圆柱面或其延长圆柱面上的幅度 $r_{mr}(\beta)$，其磁能密度 $w_r(\beta)$亦同。

3.4.5 与 B_r 对应的磁能 W_r

径向磁能幅度 r_{mr}：式(31)有 $H_R(\beta)=0.5nI\cos\beta$，$w_r=\mathrm{d}W_r/\mathrm{d}v$，而 $w_r(\beta)=0.5\mu_0H_R^2(\beta)=0.125\mu_0n^2I^2\cos^2\beta$，如式(37)中 $0.125\mu_0n^2I^2\to r_{emmax}=R$，故对应有：

$$r_{mr}(\beta)=R\cos^2\beta \tag{50}$$

径向线段 r'_{mr}：基于绕组的径向线段长为在绕组半径 R 的基础上加上与 $w_r(\beta)$对应的幅值 $r_{mr}(\beta)$，可有 $r'_{mr}(\beta)=r_{mr}(\beta)+R=R\cos^2\beta+R$。

与 $w_r(\beta)$对应的磁能幅值截面积 $A_r(\beta)$是绕组圆筒上的变厚度圆环，即：

$$A_r(\beta)=(r_{mR}(\beta)+R)^2\pi-R^2\pi=(\cos^2\beta+1)^2R^2\pi-R^2\pi=R^2\pi(\cos^2\beta+2)\cos^2\beta \tag{51}$$

经向磁能微积分 $\mathrm{d}W_r=w_r\mathrm{d}v_m=w_r(\beta)A_r(\beta)\mathrm{d}l$，$\mathrm{d}l=R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$，故据式(31)、(33)、(51)和可得径向磁场的漏磁能微积分式所得漏磁能见式(52)—(54)。

$$\mathrm{d}W_r=0.125\mu_0\pi n^2I^2R^3\mathrm{ctg}^2\beta\cos^2\beta(\cos^2\beta+2)\mathrm{d}\beta \tag{52}$$

$$W_r=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{1}{8}\mu_0\pi n^2I^2R^3\mathrm{ctg}^2\beta(\cos^4\beta+2\cos^2\beta)\mathrm{d}\beta= \frac{1}{8}\mu_0\pi n^2I^2R^3\int_{\beta_1}^{\beta_2}\mathrm{ctg}^2\beta\cos^2\beta(\cos^2\beta+2)\mathrm{d}\beta= 0.393\mu_0n^2I^2R^3J_r \tag{53}$$

$$J_r=\frac{\cos^5\beta_2}{4\sin\beta_2}-\frac{\cos^5\beta_1}{4\sin\beta_1}+\frac{13\cos^3\beta_2}{8\sin\beta_2}-\frac{13\cos^3\beta_1}{8\sin\beta_1}-\frac{39}{8}\mathrm{ctg}\beta_2+\frac{39}{8}\mathrm{ctg}\beta_1-\frac{39}{8}\beta_2+\frac{39}{8}\beta_1 \tag{54}$$

3.4.6 变压器绕组本体漏磁能

从式(48)的与 $H_x(\beta)$对应的磁能 W_{Lx}、式(53)的与 $H_r(\beta)$对应的磁能 W_r，可得绕组总的漏磁能 W 为：

$$W=W_{Lx}+W_r \tag{55}$$

定义 14：绕组本体漏感 L_L——与绕组本体漏磁通对应的漏感。

4 绕组本体漏感的算例

因绕组嵌套在铁芯上，故仍选择铁芯截面积 A_m、窗口面积 A_w 和矩形系数 K 为决策变量[3,21]。

4.1 分离绕组变压器

分离两绕组相距为 2 倍磁轭，而同心绕组间距为毫米级，前者两绕组间距内不能被视作恒定磁场。

4.1.1 绕组的决策变量表达

统一决策变量：将 $f_{cu}(L,R,x,l)\rightarrow f_{cu}(A_m,A_w,K)$，按图 7、图 14 提示，绕组本体部分的半径可表达为：

$$R=(A_m/\pi)^{0.5}+0.5(A_w^{0.5})/K \tag{56}$$

关注场点坐标 x 有：$-1.5L\le x\le 1.5L$；$l=\pm 0.5L$，$x+0.5L=2L$，$x-0.5L=-2L$，由图 14 分别可得：

$$\cos\beta_1=\frac{2K\sqrt{A_w}}{\sqrt{\dfrac{A_w}{4K^2}+\dfrac{\sqrt{A_mA_w/\pi}}{K}+\dfrac{A_m}{\pi}+4A_wK^2}} \tag{57}$$

$$\cos\beta_2=\frac{-2K\sqrt{A_w}}{\sqrt{\dfrac{A_w}{4K^2}+\dfrac{\sqrt{A_mA_w/\pi}}{K}+\dfrac{A_m}{\pi}+4A_wK^2}} \tag{58}$$

$$\sin\beta_1=\sin\beta_2=\frac{0.5\sqrt{A_w}/K+\sqrt{A_m/\pi}}{\sqrt{\dfrac{A_w}{4K^2}+\dfrac{\sqrt{A_mA_w/\pi}}{K}+\dfrac{A_m}{\pi}+4A_wK^2}} \tag{59}$$

导出 β_1、β_2，可完成式(41)的 $W_x(J_x)$、式(42)的 $J_x(\beta_1,\beta_2)$，式(53)的 $W_r(J_r)$、式(54)的 $J_r(\beta_1,\beta_2)$的量化。

4.1.2 芯柱的决策变量

将 β_1、β_2 代入式(41)、(42)、(53)、(54)得绕组磁能，还应删除铁芯影响。记 β_{fe1}、β_{fe2} 是当 $x=\pm 0.5L$ 时绕组两端的弧度，为求式(46)铁芯占位处的磁能 $W_{mx}(\beta_{fe1},\beta_{fe2})$，将式(43)的$(x+0.5L)$、$(x-0.5L)$化作：

$$\cos\beta_{fe11}=\frac{K\sqrt{A_w}}{\sqrt{0.318\,3A_m+K^2A_w}}\text{，或 }\cos\beta_{fe21}=0;$$

$$\cos\beta_{fe12}=0\text{，或 }\cos\beta_{fe22}=\frac{-K\sqrt{A_w}}{\sqrt{0.318\,3A_m+K^2A_w}};$$

$$\sin\beta_{fe1}=\sin\beta_{fe2}=\frac{\sqrt{A_m/\pi}}{\sqrt{0.318\,3A_m+K^2A_w}}\text{。}$$

显然，求得 β_{fe1}、β_{fe2}，以量化式(46)、式(47)的芯柱所占位的磁能，再根据式(48)可求出绕组本体磁能。

4.2 基于四维可视化的漏感分布

以 4D 展现式(21)初级匝数等的值域，进而将漏感以并集交集的形式融入变压器优化设计过程。

4.2.1 初级匝数及其漏感

初级匝数 $N_p=U_{prms}/(0.000\,1fK_fB_{mfe}K_{fe}A_m)$，即：

$$N_p=12\,644/A_m \tag{60}$$

次级轴向漏磁能 W_{Lxs}：将式(41)、(42)的绕组本体轴向磁能 W_{xs} 和式(46)、(47)的 $\mu=\mu_0$ 时铁芯占位处的磁能 W_{mxs}，代入式(48)可有：

$$W_{lxs}=0.07\mu_0n_s^2I_s^2(5.6R_s^3J_x-A_m^{1.5}J_{fe}) \tag{61}$$

次级总漏磁能 W_s：将 W_{lxs} 和式(53)、(54)的次级绕组本体径向磁能 W_{rs} 代入式(55)，记 R_s 为次级绕组半径，次级绕组总磁能 $W_s=W_{lxs}+W_{rs}$。

$$W_s=0.07\mu_0n_s^2I_s^2(5.6R_s^3(J_x+J_r)-A_m^{1.5}J_{fe}) \tag{62}$$

次级绕组漏感 L_{Ls}：次级绕组等效漏感 L_{Ls} 中的磁能 $0.5L_{Ls}I_s^2$ 应与上式能量 W_s 相等，抵消因子 I_s^2 后，次级漏感 $L_{Ls}=0.14\mu_0n_s^2(5.6R_s^3(J_x+J_r)-A_m^{1.5}J_{fe})$，而 $n_s=N_s/(K(A_w)^{0.5})$为次级绕组单位长度的匝数，有 $L_{Ls}=1.8\times10^{-9}(5.6R_s^3(J_x+J_r)-A_m^{1.5}J_{fe})/N_s^2/(K^2A_w)$，$N_s=(U_S/U_P)N_p$、$N_p$ 源自式(60)，$N_s=6\,059/A_m$，即：

$$L_{Ls}=0.066(5.6R_s^3(J_x+J_r)-A_m^{1.5}J_{fe})/(K^2A_wA_m^2) \tag{63}$$

式中：次级绕组半径 R_s 源自式(56)；J_x、J_{fe}、J_r 源自式(42)、(47)、(54)；L_{Ls} 包括初级绕组内外自感。

初级绕组漏磁能：因初级次级绕组的功率、电流密度大致相同，故可认为初次级绕组的厚度和长度，即体积大致相等[3]，则参考式(62)有：

$$W_p=0.07\mu_0n_p^2I_p^2(5.6R_p^3(J_x+J_r)-A_m^{1.5}J_{fe}) \tag{64}$$

$n_p=N_p/(K(A_w)^{0.5})$为初级绕组单位长度的匝数，$R_p\approx(A_m/\pi)^{0.5}+(A_w)^{0.5}/(2K)$为初级绕组半径。

初级绕组漏感：用集中等效参数表达的初级漏感 L_{Lp} 中的磁能 $0.5L_{Lp}I_p^2$，应与(64)式的 W_p 相等，即 $L_{Lp}=0.281(5.6R_p^3(J_x+J_r)-A_m^{1.5}J_{fe})/(K^2A_wA_m^2)$，且含内外自感，乘 $k_{sp}=(220/480)^2$ 将其折算到次级，得：

$$L'_{Lp}=0.059(5.6R_p^3(J_x+J_r)-A_m^{1.5}J_{fe})/(K^2A_wA_m^2) \tag{65}$$

将初次级绕组本体的漏感折算到次级后为

$$L_L=L_{Ls}+L'_{LP} \tag{66}$$

初次级绕组本体漏感 $L_L(A_m,A_w,K)$如 19 所示。

容量集上所渲染的漏感分布，有利于在变压器设计阶段兼顾其他设计目标。

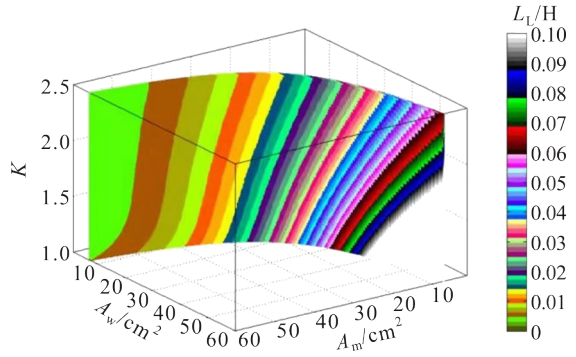


图 19 变压器绕组本体的漏感

Fig.19 Leakage inductance of transformer winding body

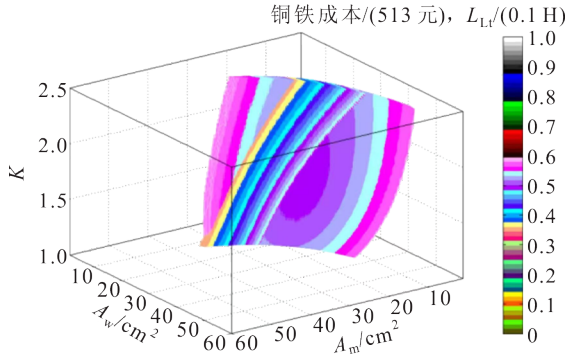


图 20 铜铁成本与总漏感的并集

Fig.20 Intersection of copper-iron cost and total leakage inductance

4.2.2 变压器总漏感

漏感值域分布：漏感=绕组漏感+铁芯漏感，原整流器用滤波电感器为 45 mH，故变压器漏感取 $L_{Lt}\in$(35 mH,55 mH)；结合式(66)并从式(23)导入基于铁芯的漏感折算值 L'_{feL}，得：

$$L_{Lt}=L'_{feL}+L_L \tag{67}$$

暂忽略损耗、温升和电压调整率等目标约束，优化中变压器总漏感与铜铁成本的并集见图 20。

由图 20 可见，当 A_m=20.5 cm²、A_w=21 cm²，K=1.8 时，变压器铜铁成本最低约 260 元，总漏感 45 mH。

5 分离绕组变压器的漏感验证

磁性器件的电磁特性与所在电路强相关，变压器设计、制作过程的所操控的漏感必须实测检验。

5.1 实际工况分析

相控整流和斩控整流各具特点[24-25]，不能相互取代，本例单相整流变压器的等效电路如图 21。

L_L 是滤波电感，输入 u_d=–130cos2ωt，感抗 X_{2C}=1/(2ωC)=0.34 Ω，R=48 Ω，X_{2C}<<R，i_{2C}>>i_R。

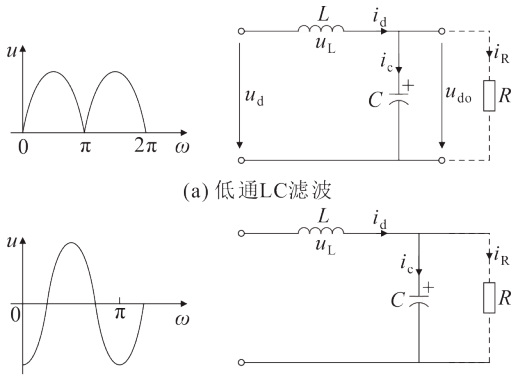


图 21 无源低通滤波

Fig.21 Passive low pass filtering

5.2 漏感的测量和测算

TH2816 型电桥测量施加 ΔB 和 ΔH 均很小，初级短路在次级进行测量，其如图 22 所示，而在额定电压且满载条件下测算电路和波形见图 23。

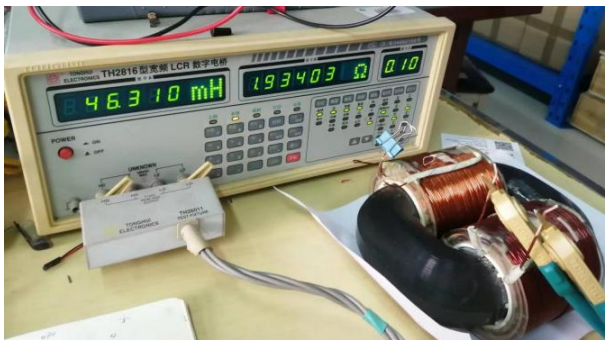


图 22 基于交流电桥的漏感测量

Fig.22 Measuring leakage inductance with AC bridge

图 22 选 100 Hz 测得漏感 46 mH，与图 20 提示的 45 mH 误差为 2%；图 23 按 100 Hz 的电压电流有效值测算出总漏感为 48 mH，误差为 4%；图 23 提示，用变压器漏感取代 LC 低通滤波器的电感器，不但能输出平稳直流电压，而且减轻电感器铜铁质量 2 kg、降低铜铁损 5 W，该方法已用于工程实践。

5.3 本文方法与传统方法的比较

本文方法与传统漏感公式计算比较见表 2。

传统漏感公式[5-8]的适用范围为初级次级 mm 级的间距内的磁场被视作不变，而分离变压器初次级间距 2 倍于磁轭，两绕组间距内的磁场有显著变化，故传统公式不适应于分离绕组变压器。

案例：1 kVA、50 Hz、220/24 V 变压器，截面 30 cm² 的 C 型铁芯。对同心绕组结构，用传统公式算得漏感为 12 mH，用前述实验测得 13 mH；而对

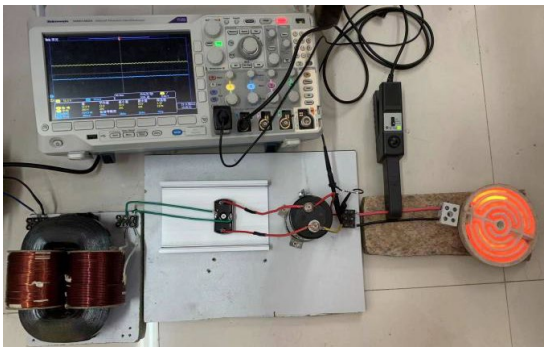


图 23 带负载测算

Fig.23 Calculation with load

表 2 本方法与传统方法的比较

Table 2 The advantages and disadvantages of this proposal compared to traditional methods

比较项目	传统方法[5-8]	有限元法[17]	本文方法
两绕组轴线	相同轴线	两平行轴线	两平行轴线
两绕组间距	mm 级	2 倍磁轭长	2 倍磁轭长
铁芯漏感	未含	未含	包含
绕组漏磁场	轴向	纵向横向	轴向径向
输入内容	有序公式	铜铁尺寸等	多目标约束
求解过程	逐步计算	展现漏磁场	寻觅几何尺寸
解的形式	解析解的点	间接估算解	集状优化解
计算工具	计算器等	商品软件	自行编程
总漏感	约 2H	可逼近特定值	45 mH
适应范围	减小漏感	验证漏感	兼顾多目标
实验检验	相距甚远	试凑可逼近	基本符合

分离绕组，因初次级绕组间距为 2 倍磁轭长度，故用传统公式算得漏感为 1.8 H，实验测得为 20 mH，亦可见传统漏感公式不适用于分离绕组变压器。

5.4 总漏感和铜铁成本

铁芯材料成本 $Q_{\mathrm{fe}}=23W_{\mathrm{fe}}=23\times7.8V_{\mathrm{fe}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$，23 元/kg 为硅钢片市价，$W_{\mathrm{fe}}$ 为铁重，7.8 kg/dm^3 为铁比重，从式(16)可知铁芯体积为 V_{fe}。

铜漆包线成本 $Q_{\mathrm{cu}}=65W_{\mathrm{cu}}=65\times8.9V_{\mathrm{cu}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$，漆包线市价 65 元/kg，铜比重 8.9 kg/dm^3，平均匝长 $L_{\mathrm{fe}}=3.54A_{\mathrm{m}}^{0.5}+1.57A_{\mathrm{w}}^{0.5}/K$，截面积 S_{cup}=0.008 cm^2，含初次级绕组的铜重 $W_{\mathrm{cu}}=2(\mathrm{MLT})S_{\mathrm{cup}}$。

变压器的铜铁成本 $Q=Q_{\mathrm{cu}}+Q_{\mathrm{fe}}$，显然，$Q(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$是三元非线性函数，图 20 利用 4D 展现其同心椭圆的数值分布。而由式(23)、式(65)—(67)可知总漏感 $L_{\mathrm{Lt}}(A_{\mathrm{m}},A_{\mathrm{w}},K)$，将 L_{Lt} 目标值与铜铁成本 Q 作并集，有利于求得优化设计的决策变量集[3]。

5.5 后续研究

本案已被多款工频变压器验证，但仍有局限性。

1）考量铁芯和绕组径向磁场后，漏感表达涉及数十个有序多值非线性函数，方程常既无解析解又难觅有效数值解，有待于求解简洁化。

2）对于磁集成结构的分离绕组式高频变压器漏感，还须考虑多线圈、非对称磁路、直流偏磁、气隙、趋肤、接近效应、分布电容和粘性磁导率。

3）铁芯的交变磁场是由初次级绕组激励所致，两者的几何尺寸和相对位置都对影响着变压器的漏磁，在测量时如何分离绕组漏感和铁芯漏感。

作者可无偿分享所涉程序代码。

6 结论

1）铁芯存在着径向漏磁场及其漏磁能，从铁芯磁感线及其与界面法线的夹角可求得漏磁感线，借用典型软铁作中间介质，可量化铁芯磁感线与空气界面间的夹角，算出铁芯漏磁能及其对应漏感，分离绕组变压器基于铁芯的漏感约占总漏感的 1/2。

2)绕组本体径向漏磁能约为轴向漏磁能的 1/3，绕组绝大多数的漏磁能， 都分布在其中点两侧各 1.5 倍绕组长的范围内。将绕组本体最大磁能密度映射为绕组几何半径，可得随磁能密度变化而改变直径的桶状体，对其磁能积分可得绕组本体的漏感。

3）将变压器的铁芯截面、窗口面积和窗口长宽比等作为决策变量，利用 4 维可视化技术，表达轴向|径向磁场、磁能及其对应漏感的值域分布，通过交并集和可视化交互，兼顾包括漏感在内的多个设计目标，得到决策变量的集状解，操控漏感值域。

附录见本刊网络版(http://hve.epri.sgcc.com.cn)。

参考文献 References

[1] 孙 凯，卢世蕾，易哲嫄，等. 面向电力电子变压器应用的大容量高频变压器技术综述[J]. 中国电机工程学报，2021，41(24)：8531-8545.
SUN Kai, LU Shilei, YI Zheyuan, et al. A review of high-power high-frequency transformer technology for power electronic transformer applications[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(24): 8531-8545.

[2] 李楚杉，方 恒，龚青苑，等. 模块化多电平中压直流变换器的高可靠自供电架构研究[J]. 中国电机工程学报，2024，44(2)：670-681.
LI Chushan, FANG Heng, GONG Qingyuan, et al. Research on the architecture of highly reliable self-powered system for modular multi-level medium voltage DC converters[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(2): 670-681.

[3] 伍家驹，陈亮亮. 磁性器件的优化设计及其可视化算法[M]. 北京：科学出版社，2023：4，92.
WU Jiaju, CHEN Liangliang. Optimal design of magnetic devices and its visualization algorithm[M]. Beijing, China: Science Press, 2023: 4, 92.

[4] 日本電気学会. 電気工学八ンドブック[M]. 東京，オーム社，2001：700，827.
The Japanese Electricity Society. Electrical engineering handbook[M]. Tokyo, Japan, OHM Pres, .2001: 700, 827.

[5] MCLYMAN C W T. Transformer and inductor design handbook[M]. 3rd ed. New York, China: CRC Press, 2004: 448-451.
[6] HURLEY W G, WÖLFLE W H. Transformers and inductors for power electronics: theory, design and applications[M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2013: 197-199.
[7] 王全保. 新编电子变压器手册[M]. 沈阳：辽宁科学技术出版社，2007.
WANG Quanbao. Electric transformer manual[M]. Shenyang, China: Liaoning Science and Technology Press, 2007.
[8] 王瑞华. 脉冲变压器设计[M]. 2 版. 北京：科学出版社，1996：38-44.
WANG Ruihua. Pulse transformer design[M]. 2nd ed. Beijing, China: Science Press, 1996: 38-44.
[9] 杨玉岗，邹雨霏，马 杰. 交错并联磁集成双向 DC/DC 变换器的软开关实现条件[J]. 中国电机工程学报，2016，36(14)：3920-3928.
YANG Yugang, ZOU Yufei, MA Jie. Soft switching interleaving and magnetically integrated bidirectional DC/DC converters[J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(14): 3920-3928.
[10] 荣德生，陈 靓，孙瑄璠. 可拓展的高增益耦合电感交错并联 Boost 变换器[J]. 高电压技术，2022，48(6)：2336-2346.
RONG Desheng, CHEN Liang, SUN Xuanjin. Expandable high-gain coupled inductor interleaved Boost converter[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(6): 2336-2346.
[11] 范学鑫，杨北超，揭贵生，等. 考虑漏感频变特性的三相立体卷铁心变压器建模及分析[J]. 电工技术学报，2023，38(1)：140-152.
FAN Xuexin, YANG Beichao, JIE Guisheng, et al. Modeling and analysis of 3D wound core transformer considering frequency-dependent characteristics of leakage inductance[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2023, 38(1): 140-152.
[12] ANSARI S A, DAVIDSON J N, FOSTER M P. Inserted-shunt integrated planar transformer with low secondary leakage inductance for LLC resonant converters[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2023, 70(3): 2652-2661.
[13] 律方成，郭云翔，李 鹏. 大功率中频变压器漏感计算及其校正方法[J]. 高电压技术，2016，42(6)：1702-1707.
LÜ Fangcheng, GUO Yunxiang, LI Peng. Calculation and correction method for leakage inductance of high-power medium-frequency transformer[J]. High Voltage Engineering, 2016, 42(6): 1702-1707.
[14] 伍家驹，杉本英彦，余达祥，等. 一种间接测算推挽变压器漏感的新方法[J]. 中国电机工程学报，2005，25(23)：129-137.
WU Jiaju, HIDEHIKO S, YU Daxiang, et al. An indirect determining method for the leakage inductance of push-pull transformers[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(23): 129-137.
[15] 伍家驹，刘 杰，刘浩广，等. SPWM 逆变器用推挽变压器漏感的时空属性[J]. 中国电机工程学报，2017，37(17)：5143-5152.
WU Jiaju, LIU Jie, LIU Haoguang, et al. Temporal and spatial attributes of leakage inductances of push-pull transformers for SPWM inverters[J]. Proceedings of the CSEE, 2017, 37(17): 5143-5152.
[16] 张鹏宁，李朋阳，刘 泽，等. 圆形利兹线高频变压器双二维漏感解析计算模型[J]. 高电压技术，2025，51(1)：75-87.
ZHANG Pengning, LI Pengyang, LIU Ze, et al. Double two-dimensional leakage inductance analytical calculation model of round litz-wire high frequency transformer[J]. High Voltage Engineering, 2025, 51(1): 75-87.
[17] 刘星亮，邱 祁，王若宇，等. 基于有限元仿真的高频高压变压器分段绕组漏感设计方法[J]. 高电压技术，2020，46(2)：610-617.
LIU Xingliang, QIU Qi, WANG Ruoyu, et al. Design method for leakage inductance of high-frequency high-voltage transformer with winding segmented based on finite element simulation[J]. High Voltage Engineering, 2020, 46(2): 610-617.
[18] AMIRBANDE M, VAHEDI A. Calculation of leakage inductance in toroidal core transformer with non-interleaved windings[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2020, 48(12): 4815-4220.
[19] SHARMA A, KIMBALL J W. Evaluation of transformer leakage inductance using magnetic image method[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2021, 57(11): 8401912.
[20] ESLAMIAN M, KHAREZY M, THIRINGER T. An accurate analytical method for leakage inductance calculation of shell-typetransformers with rectangular windings[J]. IEEE Access, 2021, 9: 72647-72660.
[21] 伍家驹，蔡智恒，谢光元，等. 小型变压器优化设计的可视化算法[J]. 高电压技术，2023，49(12)：5282-5291.
WU Jiaju, CAI Zhiheng, XIE Guangyuan, et al. The visualization algorithm for the optimization design of miniature transformers[J]. High Voltage Engineering, 2023, 49(12): 5282-5291.
[22] 赵凯华，陈熙谋. 电磁学[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2018：204-208，345-349.
ZHAO Kaihua, CHEN Ximou. Electromagnetism[M]. 4th ed. Beijing, China: Higher Education Press, 2018: 204-208, 345-349.
[23] 郭贻诚. 铁磁学[M]. 北京：北京大学出版社，2014：476-494，432.
GUO Yicheng. Ferromagnetism[M]. Beijing, China: Peking University Press, 2014: 476-494, 432.
[24] 茂木 進一. 欧州向け単相パッシブ高力率整流器における主回路定数の最適化による小型化の検討[J]. 電気学会論文誌 D，2021，141(10)：818-824.
MOTEGI S I. Optimization of circuit constants in single-phase passive high power factor rectifier for European use[J]. IEEJ Transactions on Industry Application, 2021, 141(10): 818-824.
[25] 米澤 力道. 低圧巻線側からの加圧にも対応した励磁突入電流解析用変圧器モデルの開発[J]. 電気学会論文誌 B，2022，142(1)：23-33.
YONEZAWA R. Development of a reversible transformer model for the calculation of inrush currents energizing from a higher and lower voltage windings[J]. IEEJ Transactions on Power and Energy, 2022, 142(1): 23-33.



伍家驹(通信作者)
1951—，男，博士，教授
目前主要从事电力电子技术、磁性器件的优化设计和多维可视化算法等方面研究工作
E-mail: wujiaj2003@aliyun.com

WU Jiaju
Ph.D., Professor
Corresponding author



陈亮亮
1984 —，男，博士，副教授
主要研究方向为磁悬浮高速电机和电磁轴承的优化设计及其可视化算法

CHEN Liangliang
Ph.D.
Associate professor



靳晓光
1983—，男，博士，讲师
主要研究方向为电力电子技术、开关电源、卫星电源

JIN Xiaoguang
Ph.D.

收稿日期 2025-08-18 在线出版日期 2025-12-05 编辑 卫李静

附录 A　磁化机理的简约化

在交变磁场的作用下，铁磁质内部的磁畴会发生转向，而“磁化”达到某种趋于稳定状态需要驰豫时间，即磁化过程对应着时间间隔。因为在工频状态下，磁场强度的交变周期远大于铁磁质的驰豫时间[23]，所以本文暂且忽略损耗而不计黏性系数，强调电感效应而忽略黏性系数。

附录 B　长径比 $L/R=4$ 时磁能密度立体图

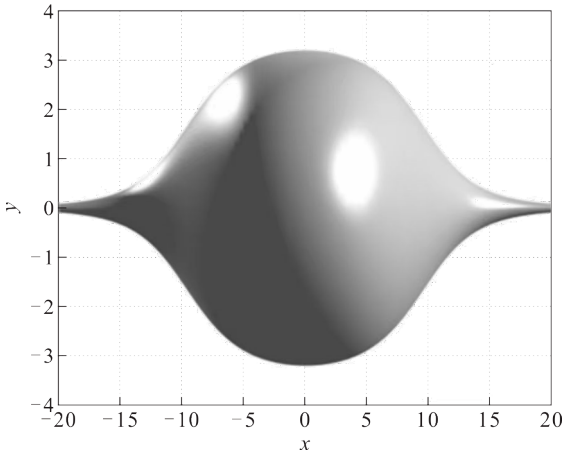


图 B　基于图 18 的立体图

Fig.B　Stereoscopic view based on Fig.18