引文格式:林雪原,孙炜玮.GNSS/SINS组合导航系统的非线性最大熵UKF算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(4):679-688.DOI:10.13203/j.whugis20240045

Citation:LIN Xueyuan,SUN Weiwei.Nonlinear Maximum Correntropy UKF Algorithm for GNSS/SINS Integrated Navigation System[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(4):679-688.DOI:10.13203/j.whugis20240045

GNSS/SINS组合导航系统的非线性最大熵UKF算法

林雪原[1] 孙炜玮[2]

1 山东外事职业大学,山东 威海,264500

2 海军航空大学,山东 烟台,264001

摘 要:无迹卡尔曼滤波器(unscented Kalman filter,UKF)是解决全球导航定位系统/捷联惯性导航系统(global navigation satellite system/strapdown inertial navigation system,GNSS/SINS)组合导航系统非线性滤波的一种有效方法。UKF在高斯噪声中能表现出良好的性能,但在非高斯噪声中,尤其是重尾非高斯噪声环境下,其性能会严重下降。为了提高UKF对重尾非高斯噪声的鲁棒性,提出了一种GNSS/SINS组合导航系统的最大熵UKF(maximum correntropy UKF,MCUKF)算法。首先,建立了GNSS/SINS组合导航系统的非线性系统模型,其特点为状态方程为非线性而测量方程为线性;然后,利用UKF的无迹变换,获得了状态及其协方差矩阵的先验估计;最后,利用最大熵准则和统计线性回归模型获得状态及其协方差矩阵的后验估计,并设计了MCUKF算法的不动点迭代实现步骤。仿真实验结果表明,在高斯噪声中UKF性能略优于MCUKF;而在重尾噪声环境下,相对于UKF,核带宽为5的MCUKF可提高位置精度13.4%、速度精度10.3%;相对于自适应卡尔曼滤波,MCUKF可提高位置精度8.8%、速度精度7.5%。在较小的核带宽时,MCUKF的滤波性能明显优于UKF,可提升复杂环境下组合导航系统的滤波精度。

关键词:UKF;最大熵准则;不动点迭代;无迹变换;统计线性回归模型

中图分类号:P228 **文献标识码**:A **收稿日期**:2024-09-15

DOI:10.13203/j.whugis20240045 **文章编号**:1671-8860(2026)04-0679-10

Nonlinear Maximum Correntropy UKF Algorithm for GNSS/SINS Integrated Navigation System

LIN Xueyuan[1] *SUN Weiwei*[2]

1 Shandong Vocational University of Foreign Affairs, Weihai 264500, China

2 Naval Aviation University, Yantai 264001, China

Abstract: **Objectives**: Unscented Kalman filter (UKF) is an effective method to solve the nonlinear filtering of global navigation satellite system/strapdown inertial navigation system (GNSS/SINS) integrated navigation system. UKF shows good performance in Gaussian noise, but its performance will be seriously degraded in non-Gaussian noise, especially when the system is interfered by some heavy tail pulse noise. In order to improve the robustness of UKF against heavy tail pulse noise, we propose a maximum correntropy UKF (MCUKF) algorithm for GNSS/SINS integrated navigation system. **Methods**: First, based on the mechanical arrangement equations of SINS and the output information of GNSS, a nonlinear system model for the GNSS/SINS integrated navigation system was established, the key feature of this model is that the state equation is nonlinear while the measurement equation is linear. Then, a prior estimation of the state and its covariance matrix is obtained by using the unscented transform (UT) of UKF. Finally, based on the establishment of the maximum correntropy criterion, a statistical linear regression model was established

基金项目:国家自然科学基金(62076249);山东省自然科学基金(ZR2020MF154)。

第一作者:林雪原,博士,教授,主要从事组合导航及其信息融合的研究。linxy_ytcn@126.com

通信作者:孙炜玮,硕士,副教授。s353375092@qq.com

using the prior estimation model and the measurement equation. Subsequently, the solution equation of the state vector and the posterior estimation of the state and its covariance matrix were solved, and the fixed-point iterative implementation steps of the MCUKF algorithm were designed. **Results**: The simulation results show that the performance of UKF is slightly better than MCUKF in Gaussian noise. Compared with UKF, MCUKF with a core bandwidth of 5 can improve position accuracy by 13.4% and velocity accuracy by 10.3%. Compared with adaptive Kaman filter, MCUKF can improve position accuracy by 8.8% and speed accuracy by 7.5%. **Conclusions**: The experimental results show that the filtering performance of MCUKF is obviously better than that of UKF at small core bandwidth, which can improve the filtering accuracy of integrated navigation system in complex environment.

Key words: UKF; maximum correntropy criterion; fixed point iteration; unscented transformation; statistical linear regression model

估计理论在全球导航定位系统/捷联惯性导航系统(global navigation satellite system/strapdown inertial navigation system,GNSS/SINS)组合导航系统中起着关键的作用。对于GNSS/SINS组合导航系统的高斯线性动态模型,卡尔曼滤波(Kalam fliter,KF)在最小均方误差(minimum mean square error,MMSE)准则下可提供最优状态估计[1]。而GNSS/SINS组合导航系统本质上是非线性的,为了解决非线性系统的滤波问题,迄今为止,扩展KF[2](extended KF,EKF)和无迹KF[3](unscented KF,UKF)是两种广泛使用的滤波方法。EKF通过一阶线性化近似非线性系统,并在此近似的基础上使用KF。然而当系统高度非线性时,粗糙的近似可能导致滤波发散;此外,雅克比矩阵的推导往往导致EKF实现困难[4]。而UKF通过一组选定的Sigma点近似状态的概率分布,并通过非线性方程来传递该分布,理论证明UKF比EKF具有更好的滤波精度[5],针对GNSS/SINS组合导航系统,文献[6]通过仿真证明了UKF的滤波性能明显优于常规KF的滤波性能。

当测量系统受到重尾非高斯噪声的干扰时,UKF性能不佳。重尾非高斯噪声是非高斯噪声的一种常见形式,尤其是系统受脉冲噪声干扰时噪声呈现非高斯的重尾分布[7]。这些重尾非高斯噪声在实际的工程应用中经常出现,如当受到内部及外部电磁干扰等时,GNSS自身不稳定导致所观测信息带有非高斯噪声[8];飞行环境的复杂多变性及载体自身的大幅度机动导致观测信息带有非高斯噪声[9];GNSS接收信号不是足够强时易导致观测信息带有非高斯噪声[10]。UKF也是基于MMSE准则,因此对重尾非高斯噪声表现出较强的敏感性。而相关熵作为信息论学习中的一种局部相似度量,近年来成功地应用于鲁棒机器学习和非高斯信号处理中[11-12],最大熵准则下的自适应滤波算法可以在重尾非高斯噪声中取得优异的滤波性能[13-14]。文献[15-16]将最大熵的概念简单地应用于GNSS/SINS松组合导航系统的线性滤波模型,且滤波过程中仅利用测量值目标函数相关熵与状态估计值目标函数相关熵的比值来改变卡尔曼滤波增益,系统对重尾噪声敏感性依然较强。文献[17]将最大熵准则与变分贝叶斯滤波相结合,并应用于状态方程及测量方程均为线性的GNSS/SINS组合导航系统,有效地提高了系统对重尾非高斯噪声的鲁棒性。文献[18]将最大熵准则应用于状态方程为线性而测量方程为非线性的CNS/SINS组合导航系统,以提高弹道导弹的导航精度。文献[19]将最大熵准则应用于状态方程为线性而测量方程为非线性航天器相对状态测量,并取得了较好的滤波效果。

由于GNSS/SINS组合导航系统中SINS是一种典型的非线性系统,故基于SINS误差为被估状态的间接式KF精度明显低于基于SINS导航参数为被估状态的直接式KF精度[6]。因此,基于相关熵的基本概念,本文利用无迹变换与统计线性回归模型,将最大熵准则与UKF算法进行有机融合,提出了一种GNSS/SINS组合导航系统的最大熵UKF(maximum correntropy UKF,MCUKF)算法。与文献[17-19]不同的是,本文算法中状态方程为非线性的,而测量方程为线性的。

1 组合导航系统非线性模型

在GNSS接收机直接提供位置及速度信息的基础上,取东(east,E)北(north,N)天(up,U)地理坐标系为导航坐标系(g系),建立GNSS/

SINS组合导航系统的非线性模型为[6]:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=f\big(\boldsymbol{X}(t)\big)+\boldsymbol{W}(t)\\ \boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{V}(t)\end{cases} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix}\theta & \gamma & \varphi & v_{\mathrm{E}} & v_{\mathrm{N}} & v_{\mathrm{U}} & \lambda & L & h & \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{Z}(t)=\begin{bmatrix}v_{\mathrm{G,E}} & v_{\mathrm{G,N}} & v_{\mathrm{G,U}} & \lambda_{\mathrm{G}} & L_{\mathrm{G}} & h_{\mathrm{G}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{H}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{6\times3} & \boldsymbol{I}_{6\times6} & \boldsymbol{0}_{6\times6}\end{bmatrix} \tag{4}$$

式中,γ、θ、φ分别表示由SINS计算得到的横滚角、俯仰角和航向角;v_{E}、v_{N}、v_{U}分别表示由SINS计算得到的E向速度、N向速度和U向速度;λ、L、h分别表示由SINS计算得到的经度、纬度和高度;下标G表示由GNSS提供的相关信息;ε_x、ε_y和ε_z分别表示陀螺在机体坐标系x、y和z 3个轴上的零偏;∇_x、∇_y和∇_z表示加速度计的零偏。

记载体坐标系(b系)相对于g系的角速度在b系内的投影为$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gb}}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{gbx}}^{\mathrm{b}} & \omega_{\mathrm{gby}}^{\mathrm{b}} & \omega_{\mathrm{gbz}}^{\mathrm{b}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,SINS姿态解算方程为:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\gamma}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gb}}^{\mathrm{b}}+\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_{\varepsilon_x}\\ w_{\varepsilon_y}\\ w_{\varepsilon_z}\end{bmatrix}\right) \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{\mathrm{E}}\\ \dot{v}_{\mathrm{N}}\\ \dot{v}_{\mathrm{U}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{\mathrm{E}}\\ f_{\mathrm{N}}\\ f_{\mathrm{U}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & (2\omega_{\mathrm{ie}}+\dot{\lambda})\sin L & -(2\omega_{\mathrm{ie}}+\dot{\lambda})\cos L\\ -(2\omega_{\mathrm{ie}}+\dot{\lambda})\sin L & 0 & -\dot{L}\\ (2\omega_{\mathrm{ie}}+\dot{\lambda})\cos L & \dot{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{\mathrm{E}}\\ v_{\mathrm{N}}\\ v_{\mathrm{U}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -g\end{bmatrix}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}\left(\begin{bmatrix}\nabla_x\\ \nabla_y\\ \nabla_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_{\nabla_x}\\ w_{\nabla_y}\\ w_{\nabla_z}\end{bmatrix}\right) \tag{8}$$

式中,$\begin{bmatrix}w_{\nabla_x} & w_{\nabla_y} & w_{\nabla_z}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$为加速度计白噪声。

$$\boldsymbol{W}(t)=\left[\left(\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{gbx}}^{\mathrm{b}} & \omega_{\mathrm{gby}}^{\mathrm{b}} & \omega_{\mathrm{gbz}}^{\mathrm{b}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\quad\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}\begin{bmatrix}w_{\nabla_x} & w_{\nabla_y} & w_{\nabla_z}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{0}_{1\times9}\right]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

记$\boldsymbol{W}(t)$的方差阵为$\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{V}(t)$的方差阵为$\boldsymbol{R}$。

2　组合导航系统的最大熵UKF算法

2.1　相关熵的概念

相关熵是两个随机变量之间的广义相似性度量,给定两个随机变量Y_1和Y_2,设其联合分布函数为$F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)$,则其相关熵$C(Y_1,Y_2)$定义为:

$$C(Y_1,Y_2)=E\left[\kappa(Y_1,Y_2)\right]=\int\kappa(y_1,y_2)\cdot\mathrm{d}F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) \tag{10}$$

式中,$E[\,]$代表期望运算;$\kappa(\,,\,)$表示核函数,本文中选取的核函数为高斯核函数:

$$\kappa(y_1,y_2)=G_\sigma(e)=\exp\left(-e^2/2\sigma^2\right) \tag{11}$$

式中,$f()$为非线性函数;$\boldsymbol{W}(t)$为系统噪声向量;$\boldsymbol{V}(t)$为测量噪声向量;$\boldsymbol{X}(t)$为系统状态向量;$\boldsymbol{Z}(t)$为系统测量向量;$\boldsymbol{H}(t)$为测量矩阵。计算公式为[20]:

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\gamma & 0 & \sin\gamma\cos\theta\\ \sin\gamma\cos\theta & \cos\theta & -\cos\theta\cos\gamma\\ \sin\gamma & 0 & -\cos\gamma\end{bmatrix} \tag{6}$$

式中,$\begin{bmatrix}w_{\varepsilon_x} & w_{\varepsilon_y} & w_{\varepsilon_z}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$为陀螺白噪声。

SINS的位置解算方程为:

$$\begin{bmatrix}\dot{L}\\ \dot{\lambda}\\ \dot{h}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{v_{\mathrm{N}}}{R_n+h} & \dfrac{v_{\mathrm{E}}}{(R_m+h)\cos L} & v_{\mathrm{U}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式中,R_n和R_m分别表示地球卯酉圈曲率半径和地球子午圈半径。

假设f_{E}、f_{N}和f_{U}分别为加速度计输出的沿E向、N向和U向的比力测量值,ω_{ie}为地球自转角速率,g为当地重力加速度,$\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}$为由b系到g系的姿态转换矩阵。则SINS的速度解算方程为[21]:

则式(1)中的系统噪声可以表示为:

式中,$e=y_1-y_2$;$\sigma>0$代表核宽度;G表示高斯核函数。

取高斯核函数的泰勒级数展开,有:

$$C(Y_1,Y_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\sigma^{2n}n!}E\left[(Y_1-Y_2)^{2n}\right] \tag{12}$$

因此,相关熵是误差变量Y_1-Y_2的所有偶阶矩的加权和。当核宽度σ非常大时(与数据的动态范围相比),相关熵主要取决于二阶矩。

在许多实际情况下,数据是有限的,且联合分布$F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)$是未知的。此时,可以使用样本均值估计器来估计相关熵,则相关熵$C(Y_1,Y_2)$的估计值$\hat{C}(Y_1,Y_2)$可以表示为:

$$\hat{C}(Y_1,Y_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G_\sigma(e(i)) \tag{13}$$

式中,$e(i)=y_1(i)-y_2(i)$,$\{y_1(i),y_2(i)\}_{i=1}^{N}$为从$F_{Y_1Y_2}$中抽取的$N$个样本。

本文目标是求解一个自适应模型的参数向量$\boldsymbol{w}$,假设Y_1和Y_2分别代表模型的输出和期望响应,则基于式(13)的最大相关熵准则(maximum correntropy criterion,MCC)的学习可以表示为解决优化问题:

$$\hat{\boldsymbol{w}}=\arg\max_{\boldsymbol{w}\in\Omega}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G_\sigma(e(i)) \tag{14}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{w}}$表示最优解;Ω表示参数的集合。

基于式(14)将MCC和统计线性回归模型相结合,推导出一种新型的组合导航系统非线性滤波,即MCUKF,该算法在非高斯环境下表现良好,因为相关熵包含了误差变量的二阶矩和高阶矩。MCUKF也包含两个步骤,即时间更新和量测更新。

2.2 时间更新

经过离散化,式(1)中的各向量及矩阵分别变为$\boldsymbol{X}_k$、$\boldsymbol{W}_k$、$\boldsymbol{V}_k$、$\boldsymbol{Z}_k$和$\boldsymbol{H}_k$,k为序号。时间更新过程主要利用无迹变换完成。根据式(1),测量方程是线性、测量噪声是加性时,系统增广状态向量设置为[22-23]:

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_k^a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_k & \boldsymbol{W}_k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\chi}_k^a=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\chi}^{\boldsymbol{X}_k})^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{\chi}^{\boldsymbol{W}_k})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{15}$$

式中,$\boldsymbol{\chi}_k^a$为增广状态向量$\boldsymbol{X}_k^a$的采样点向量。假设$\boldsymbol{\chi}^{\boldsymbol{X}_k}$和$\boldsymbol{\chi}^{\boldsymbol{W}_k}$的维数(亦即$\boldsymbol{X}_k$和$\boldsymbol{W}_k$的维数)分别为$n$和$r$,$\boldsymbol{\chi}^a$的维数定义为$L_a$,则有$L_a=n+r$。

初始化如下:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_0=E[\boldsymbol{X}_0]\\ \boldsymbol{P}_0=E\left[(\boldsymbol{X}_0-\hat{\boldsymbol{X}}_0)(\boldsymbol{X}_0-\hat{\boldsymbol{X}}_0)^{\mathrm{T}}\right]\\ \hat{\boldsymbol{X}}_0^a=E[\boldsymbol{X}_0^a]=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{P}_0^a=E\left[\left(\boldsymbol{X}_0^a-\hat{\boldsymbol{X}}_0^a\right)\left(\boldsymbol{X}_0^a-\hat{\boldsymbol{X}}_0^a\right)^{\mathrm{T}}\right]=\\ \qquad\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_0\end{bmatrix}\end{cases} \tag{16}$$

一组$2L_a+1$个样点,也称作Sigma点,在上一次时间步长$k-1$,可以由状态估计量$\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$、$\boldsymbol{P}_{k-1}$及$\boldsymbol{Q}_{k-1}$产生:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\chi}_{0,k-1}^a=\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^a\\ \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^a=\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^a+\left(\sqrt{L_a\boldsymbol{P}_{k-1}^a}\right)_i, i=1,2,\cdots,L_a\\ \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^a-\left(\sqrt{L_a\boldsymbol{P}_{k-1}^a}\right)_i, i=L_a+1,L_a+2,\cdots,2L_a\end{cases}\end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases}w_0^m=0\\ w_0^c=2\\ w_i^m=w_i^c=1/2L_a, i=1,2,\cdots,2L_a\end{cases} \tag{18}$$

式中,$\left(\sqrt{L_a\boldsymbol{P}_{k-1}^a}\right)_i$为$L_a\boldsymbol{P}_{k-1}^a$的平方根矩阵的第$i$列;$w_i^m$和$w_i^c(i=0,1,\cdots,2L_a)$表示加权系数。

变换后的Sigma点表示为:

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{\boldsymbol{X}_k}=f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{\boldsymbol{X}_{k-1}},\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{\boldsymbol{W}_{k-1}}) \tag{19}$$

先验状态均值及其协方差矩阵表示为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L_a}w_i^m\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{\boldsymbol{X}_k} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L_a}w_i^c\left[\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{\boldsymbol{X}_k}-\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{\boldsymbol{X}_k}-\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

2.3 测量更新

将式(20)和式(1)中的第二项组合,得到统计线性回归模型[24]:

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{Z}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{H}_k\end{bmatrix}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\xi}_k \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\xi}_k=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}-\boldsymbol{X}_k\\ \boldsymbol{V}_k\end{bmatrix} \tag{23}$$

且

$$E\left[\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{k|k-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{P,k|k-1}\boldsymbol{S}_{P,k|k-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}_{V,k}\boldsymbol{S}_{V,k}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{S}_k^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

式中,$\boldsymbol{S}_k$可以由$E\left[\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\right]$的Cholesky分解得到。

式(22)的两边同时乘以$\boldsymbol{S}_k^{-1}$,可以将统计回归模型转换为:

$$\boldsymbol{D}_k=\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{e}_k \tag{25}$$

式中,

$$\boldsymbol{D}_k=\boldsymbol{S}_k^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{Z}_k\end{bmatrix},\boldsymbol{M}_k=\boldsymbol{S}_k^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{H}_k\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{S}_k^{-1}F_k$$

可以证明$E[\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{I}$,即$\boldsymbol{e}_k$为白噪声。

根据MCC准则,定义一个成本函数[25]:

$$J_L(\boldsymbol{X}_k)=\frac{1}{m+n}\sum_{i=1}^{L}G_\sigma(d_{i,k}-\boldsymbol{M}_{i,k}\boldsymbol{X}_k) \tag{26}$$

式中,$d_{i,k}$为$\boldsymbol{D}_k$的第i个元素;$\boldsymbol{M}_{i,k}$为$\boldsymbol{M}_k$的第i行;

且$n+m$为$\boldsymbol{D}_k$的维数;m为$\boldsymbol{Z}_k$的维数。

在MCC准则下,$\boldsymbol{X}_k$的最优估计来自:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\arg\max_{\boldsymbol{X}_k} J_L(\boldsymbol{X}_k)=\arg\max_{\boldsymbol{X}_k}\sum_{i=1}^{L}G_\sigma(e_{i,k}) \tag{27}$$

式中,$e_{i,k}$为$\boldsymbol{e}_k$的第i个元素,且

$$\boldsymbol{X}_k=\left\{\sum_{i=1}^{L}\left[G_\sigma(e_{i,k})\boldsymbol{M}_{i,k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{i,k}\right]\right\}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{L}\left[G_\sigma(e_{i,k})\boldsymbol{M}_{i,k}^{\mathrm{T}}d_{i,k}\right]\right\} \tag{30}$$

根据式(28),且式(30)是关于$\boldsymbol{X}_k$的不动点方程,则式(30)可重写为:

$$\boldsymbol{X}_k=F(\boldsymbol{X}_k) \tag{31}$$

因此,可以得到不动点迭代算法为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j)}=F(\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j-1)}) \tag{32}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j)}$代表在$k$时刻第$j$次定点迭代的估计状态$\hat{\boldsymbol{X}}_k$。

不动点方程(31)可以表达成矩阵形式:

$$\boldsymbol{X}_k=\left(\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{M}_k\right)^{-1}\left(\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{D}_k\right) \tag{33}$$

式中,

$$\boldsymbol{C}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{X,k} & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}_{Z,k}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{X,k}=\mathrm{diag}\left(G_\sigma(e_{1,k}),G_\sigma(e_{2,k}),\cdots,G_\sigma(e_{n,k})\right)$$

$$\boldsymbol{C}_{Z,k}=\mathrm{diag}(G_\sigma(e_{n+1,k}),G_\sigma(e_{n+2,k}),\cdots,G_\sigma(e_{n+m,k}))$$

根据矩阵逆引理知识及KF的推导过程[2],式(33)可以进一步表达为:

$$\boldsymbol{X}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}+\bar{\boldsymbol{K}}_k(\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}) \tag{34}$$

式中,

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{K}}_k=\bar{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\bar{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{R}}_k)\\ \bar{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}=\boldsymbol{S}_{P,k|k-1}\boldsymbol{C}_{X,k}^{-1}\boldsymbol{S}_{P,k|k-1}^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{R}}_k=\boldsymbol{S}_{V,k}\boldsymbol{C}_{Z,k}^{-1}\boldsymbol{S}_{V,k}^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{35}$$

同时,相应的协方差矩阵更新为:

$$\boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{K}}_k\boldsymbol{H}_k)\bar{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}(\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{K}}_k\boldsymbol{H}_k)^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{K}}_k\bar{\boldsymbol{R}}_k\bar{\boldsymbol{K}}_k^{\mathrm{T}} \tag{36}$$

根据式(34),$\bar{\boldsymbol{K}}_k$依赖于$\bar{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}$和$\bar{\boldsymbol{R}}_k$,而$\bar{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}$和$\bar{\boldsymbol{R}}_k$又通过$\boldsymbol{C}_{X,k}$和$\boldsymbol{C}_{Z,k}$与$\boldsymbol{X}_k$相联系,即式(34)是$\boldsymbol{X}_k$的不动点方程。可以通过不动点迭代法求解式(34)。不动点迭代的初始值设为$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(0)}=\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}$以保证算法的收敛性,收敛后的值即后验估计$\hat{\boldsymbol{X}}_k$。

基于上述分析,GNSS/SINS组合导航系统的非线性MCUKF算法描述为:

1) 选择正的核带宽σ和较小的正数ε,设置初始估计$\hat{\boldsymbol{X}}_0$及其对应的协方差矩阵$\boldsymbol{P}_0$,设$k=1$。

2)应用方程(15)~(21)获得先验估计$\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}$及其协方差矩阵$\boldsymbol{P}_{k|k-1}$,并利用Cholesky分解得到$\boldsymbol{S}_k$。

3) 构建统计线性回归模型(22)。

4) 将方程(22)变换为方程(25),设$j=1$及$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(0)}=\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}$。

5) $\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j)}$的计算过程如下::

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j)}=\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}+\tilde{\boldsymbol{K}}_k(\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}) \tag{37}$$

式中,

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_k=\tilde{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\tilde{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\tilde{\boldsymbol{R}}_k) \tag{38}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}=\boldsymbol{S}_{P,k|k-1}\tilde{\boldsymbol{C}}_{X,k}^{-1}\boldsymbol{S}_{P,k|k-1}^{\mathrm{T}} \tag{39}$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_k=\boldsymbol{S}_{V,k}\tilde{\boldsymbol{C}}_{Z,k}^{-1}\boldsymbol{S}_{V,k}^{\mathrm{T}} \tag{40}$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{X,k}=\mathrm{diag}(G_\sigma(\tilde{e}_{1,k}),G_\sigma(\tilde{e}_{2,k}),\cdots,G_\sigma(\tilde{e}_{n,k})) \tag{41}$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{Z,k}=\mathrm{diag}(G_\sigma(\tilde{e}_{n+1,k}),G_\sigma(\tilde{e}_{n+2,k}),\cdots,G_\sigma(\tilde{e}_{n+m,k})) \tag{42}$$

$$\tilde{e}_{i,k}=d_{i,k}-\boldsymbol{M}_{i,k}\boldsymbol{X}_k^{(j-1)},i=1,2,\cdots,n+m \tag{43}$$

6) 比较当前的估计值与最后一步的估计值,以确定迭代停止条件。根据式(2),导航参数的估计值主要有姿态估计值、位置估计值和速度估计值,其中位置估计值中经度和纬度是以国际单位rad来表达的,高度是以m来表示的,速度估计值均是以m/s来表示的。所以,迭代停止条件可设定为以下两种[26]。

(1)根据水平位置估计值而确定的迭代停止条件为:

$$\frac{\left\|\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j)}(7:8)-\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j-1)}(7:8)\right\|}{\left\|\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j-1)}(7:8)\right\|}\leqslant\varepsilon \tag{44}$$

(2)根据速度估值而确定的迭代停止条件为:

$$\frac{\left\|\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j)}(4:6)-\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j-1)}(4:6)\right\|}{\left\|\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j-1)}(4:6)\right\|}\leqslant\varepsilon \tag{45}$$

如果迭代停止条件满足,则$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(j)}$,并进入步骤7);否则,$j+1\to j$,并返回步骤5)。

7) 计算后验协方差矩阵:

$$\boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{K}}_k\boldsymbol{H}_k)\tilde{\boldsymbol{P}}_{k|k-1}(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{K}}_k\boldsymbol{H}_k)^{\mathrm{T}}+\tilde{\boldsymbol{K}}_k\tilde{\boldsymbol{R}}_k\tilde{\boldsymbol{K}}_k^{\mathrm{T}} \tag{46}$$

由式(41)、(42)可以看出,当$\tilde{e}_{i,k}=0$时,MCUKF简化为UKF。

3 组合导航实验及分析

3.1 实验设计

本文实验相关工作依托于实验室搭建的GNSS/SINS组合导航综合仿真实验系统。实验设置如表1所示。设定飞行器初始位置为(118°,29°)、50 m,初始航向角为90°,飞行时间为2 000 s,飞行轨迹如图1所示;捷联解算周期为0.02 s,滤波周期为1 s。

表1 实验参数设置

Table 1 Simulation Parameter Setting of Navigation Sensors

误差类型	误差项	误差值
传感器误差	陀螺仪常值漂移/(°·s^{-1})	5
	陀螺仪白噪声/(°·s^{-1})	5
	加速度计常值漂移/(m·s^{-2})	5×10^{-4}
	加速度计白噪声/(m·s^{-2})	5×10^{-4}
	GNSS位置误差/m	8
	GNSS速度误差/(m·s^{-1})	0.2
滤波初始误差	姿态角误差/(°)	0.5
	速度误差/(m·s^{-1})	0.1
	位置误差/m	5

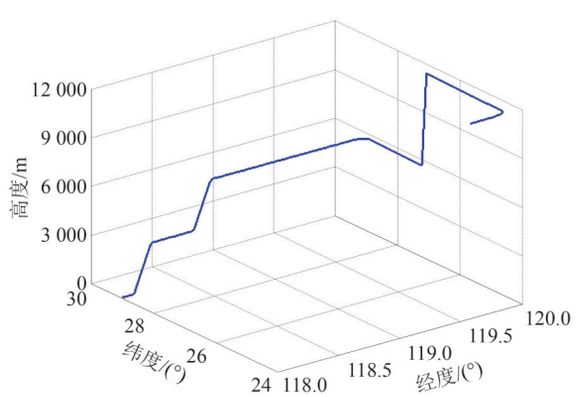


图1 载体飞行轨迹

Fig. 1 Flight Trajectory of Carrier

根据表1的参数设置,同时基于式(1)的GNSS/SINS组合导航系统非线性系统模型,可以得到正常情况下测量噪声方差阵表达为:

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(0.1^2,0.1^2,0.1^2,(8/R_e)^2,(8/R_e/\cos L)^2,8^2) \tag{47}$$

式中,等号右边前3项代表GNSS速度误差方差(单位为m^2/s^2),第4项、第5项分别为GNSS经度误差方差、纬度误差方差(单位均为rad^2),第6项为GNSS高度误差方差(单位为m^2);R_e表示地球半径;L代表纬度。

3.2 高斯噪声环境下的实验分析

假设飞行器处于正常的飞行环境中,即GNSS输出噪声方差与式(47)一致,即$\boldsymbol{V}_k\sim N(0,\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}})$。根据§3.1设置的实验条件进行了一组实验,迭代停止条件采用式(44)。图2~4给出了在高斯噪声环境下基于UKF及MCUKF($\sigma=5$)的各导航参数的误差对比曲线,可以看出两种滤波方法的性能基本相同。

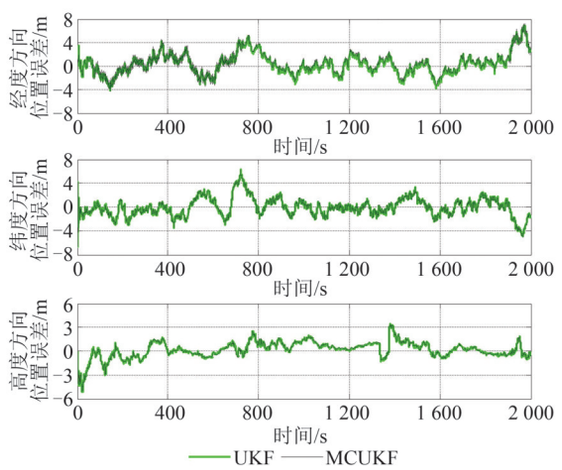


图2 高斯噪声干扰下位置误差曲线对比图

Fig. 2 Position Error Curve Comparison Diagram Under Gaussian Noise Interference

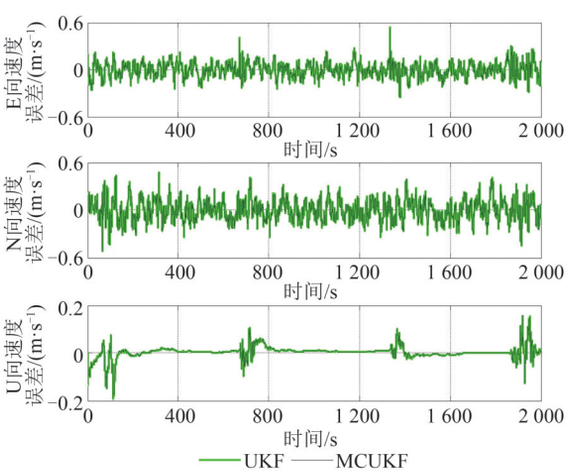


图3 高斯噪声干扰下速度误差曲线对比图

Fig. 3 Velocity Error Curve Comparison Diagram Under Gaussian Noise Interference

为了定量地分析在高斯噪声干扰下UKF与MCUKF的滤波性能,表2给出了基于UKF及MCUKF算法的各导航参数误差的均方根误差

(root mean square error,RMSE)。由于测量噪声是与初期假设一致的高斯噪声,UKF在所有滤波器中实现了最小的RMSE,并达到最高的滤波精度,相对于MCUKF($\sigma=5$),UKF可提高位置精度1.6%,提高速度精度0.7%。在MCUKF中,随着核带宽的增加,各导航参数误差呈降低的趋势,故应该选择更大的核带宽以获得更好的滤波精度。同时,可以观测到当核带宽较小时,迭代次数较大;在高斯噪声环境下,UKF性能略高于MCUKF。

3.3　重尾非高斯噪声环境下的实验分析

假设测量值受到重尾高斯噪声的干扰,且该重尾非高斯噪声满足分布[24-26]:

$$\boldsymbol{V}_k\sim\begin{cases}N(0,\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}),90\%\\ \chi^2(0,100\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}),10\%\end{cases}\tag{48}$$

式中,χ^2表示卡方分布。

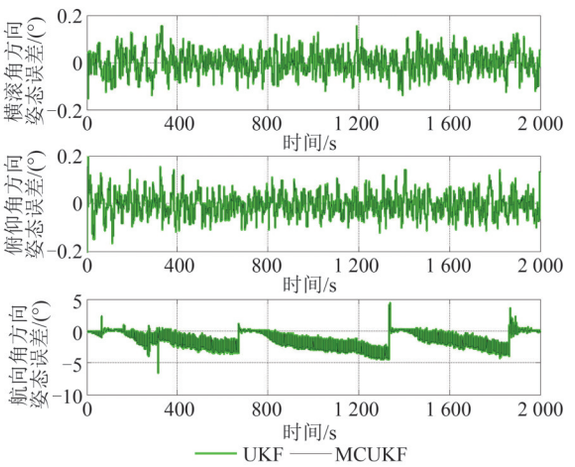


图4　高斯噪声干扰下姿态误差曲线对比图

Fig. 4　Attitude Error Curve Comparison Diagram Under Gaussian Noise Interference

表2　测量噪声为高斯噪声时UKF和MCUKF($\varepsilon=1\times10^{-9}$)滤波精度对比

Table 2　Comparison of Filtering Accuracy Between UKF and MCUKF ($\varepsilon=1\times10^{-9}$) for Gaussian Noise

滤波器	位置误差RMSE/m			速度误差RMSE/(m·s^{-1})			姿态误差RMSE/(°)			平均迭代次数
	经度方向	纬度方向	高度方向	E	N	U	横滚角方向	俯仰角方向	航向角方向	
UKF	1.751 9	1.521 8	1.015 0	0.086 5	0.084 4	0.024 3	0.045 6	0.044 8	1.354 6	1.000
MCUKF($\sigma=3$)	1.768 6	1.533 1	1.032 5	0.087 4	0.084 6	0.024 7	0.048 2	0.047 3	1.391 3	2.818
MCUKF($\sigma=5$)	1.768 1	1.529 1	1.023 0	0.087 4	0.084 6	0.024 7	0.048 2	0.047 2	1.390 2	2.421
MCUKF($\sigma=7$)	1.764 6	1.526 0	1.016 7	0.087 2	0.084 5	0.024 6	0.047 7	0.046 8	1.383 1	2.236
MCUKF($\sigma=17$)	1.761 2	1.525 6	1.015 8	0.087 0	0.084 5	0.024 6	0.047 2	0.046 4	1.375 6	2.013
MCUKF($\sigma=30$)	1.753 3	1.526 7	1.015 2	0.086 5	0.084 5	0.024 5	0.045 8	0.045 0	1.354 9	2.000

同样,采用§3.1设置的实验条件进行了另外一组实验,迭代停止条件依然采用式(44)。图5~7给出了基于UKF算法及MCUKF($\sigma=3$)算法的导航误差对比曲线,可以看出,基于MCUKF算法的各导航参数误差明显小于基于UKF算法对应的导航参数误差。在重尾非高斯噪声干扰下,MCUKF($\sigma=3$)滤波性能优于UKF。自适应KF(adaptive KF,AKF)算法[24-25]对于非高斯噪声也具有鲁棒性,为了对比AKF与MCUKF的滤波性能,图8、图9给出了基于AKF算法及MCUKF算法($\sigma=3$)的部分导航误差对比曲线。

为了定量地分析AKF、UKF及MCUKF的滤波精度,表3给出了在重尾非高斯噪声干扰下,各导航参数误差的RMSE统计分析。可以看出,当核带宽过大时,MCUKF的滤波性能不好,实验过程中发现当$\sigma<2$时滤波过程产生数据溢出进而产生滤波异常。然而,当$\sigma=3$时的MCUKF优于所有的滤波器、可以实现最小的RMSE,可见为了获得较高的滤波精度,应选择相对较小的核带宽。相对于UKF,MCUKF($\sigma=5$)可提高位置精度13.4%,提高速度精度10.3%;相对于AKF,MCUKF($\sigma=5$)可提高位置精度8.8%,提高速度精度7.5%。在重尾非高斯噪声下,AKF的滤波性能优于UKF,而MCUKF的滤波性能优于AKF。同样地,核带宽越大,MCUKF的收敛速度越快。一般情况下,MCUKF的不动点迭代算法仅需几次迭代即可收敛到最优解。

由于MCUKF涉及循环迭代处理过程,所以为了考察其实时性,在Intel Core i3-1125G4 (2.0 GHz/L3 8 MB)处理器环境下对MCUKF的每次滤波所耗时间进行了记录,其变化曲线如图10所示。根据表1所示,实验的滤波周期为1 s,即共有2 000次滤波。通过图10可以看出最大滤波耗时为5×10^{-3} s,远远小于SINS的计算周期

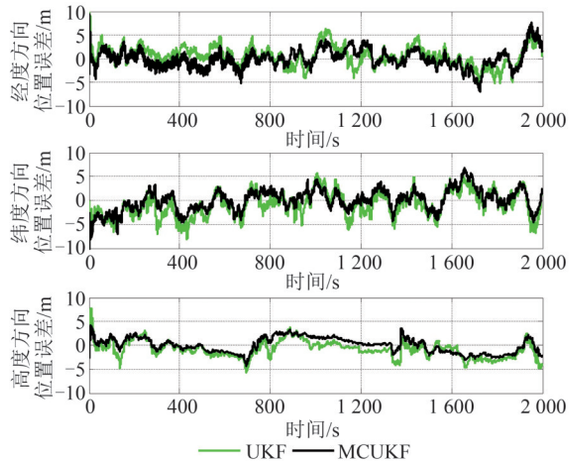


图5 重尾非高斯噪声干扰下位置误差曲线对比图

Fig. 5 Position Error Curve Comparison Diagram Under Heavy Tail Non-Gaussian Noise Interference

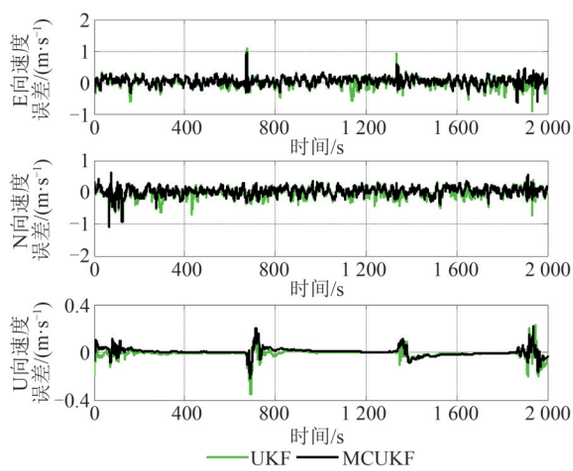


图6 重尾非高斯噪声干扰下速度误差曲线对比图

Fig. 6 Speed Error Curve Comparison Diagram Under Heavy Tail Non-Gaussian Noise Interference

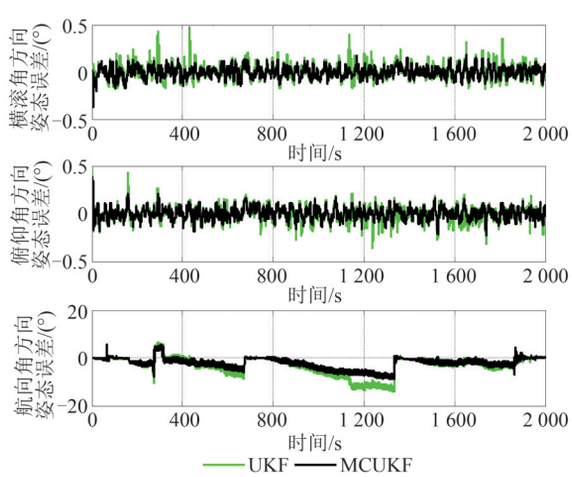


图7 重尾非高斯噪声干扰下姿态误差曲线对比图

Fig. 7 Attitude Error Curve Comparison Diagram Under Heavy Tail Non-Gaussian Noise Interference

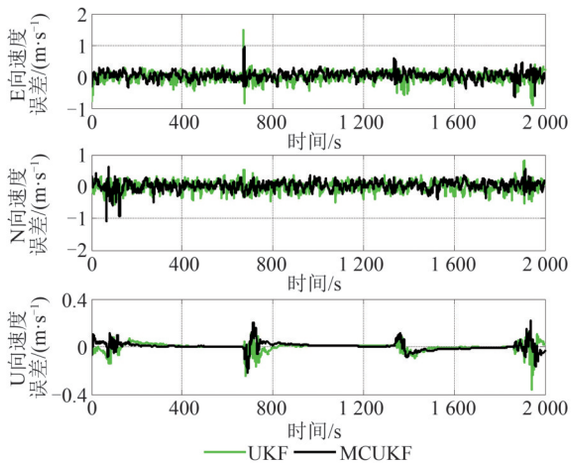


图8 重尾非高斯噪声下基于AKF和MCUKF的速度误差曲线对比图

Fig. 8 Velocity Error Curve Comparison Diagram Based on AKF and MCUKF Under Heavy Tail Non-Gaussian Noise

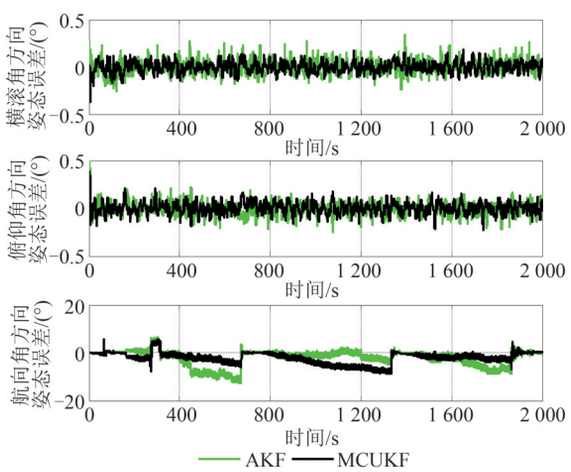


图9 重尾非高斯噪声下基于AKF和MCUKF的姿态误差曲线对比图

Fig. 9 Attitude Error Curve Comparison Diagram Based on AKF an MCUKF Under Heavy Tail Non-Gaussian Noise

0.02 s,故MCUKF完全可以保证系统的实时性。

4 结 语

在高斯模型下,GNSS/SINS非线性组合导航系统的UKF算法基于MMSE准则是最优的,当测量系统受到重尾非高斯噪声干扰时,系统性能下降。为了解决该问题,利用无迹变换获得状态及其协方差矩阵的先验估计,基于最大熵准则及统计线性回归模型获得状态及其协方差矩阵的后验估计,进而提出了MCUKF算法。

表 3　测量噪声为重尾非高斯噪声时UKF和MCUKF($\varepsilon=1\times10^{-9}$)滤波精度对比

Table 3　Comparison of Filtering Accuracy Between UKF and MCUKF ($\varepsilon=1\times10^{-9}$) for Heavy Tail Non-Gaussian Noise

滤波器	位置误差RMSE/m			速度误差RMSE/(m·s^{-1})			姿态误差RMSE/(°)			平均迭代次数
	经度方向	纬度方向	高度方向	E	N	U	横滚角方向	俯仰角方向	航向角方向	
UKF	2.152 0	2.664 3	1.725 9	0.145 0	0.150 4	0.035 0	0.082 0	0.078 8	3.919 0	1.000
AKF	2.166 0	2.405 0	1.654 0	0.138 0	0.148 0	0.035 0	0.076 3	0.075 2	3.562 0	1.000
MCUKF($\sigma=3$)	1.962 8	2.290 1	1.566 0	0.118 6	0.129 8	0.032 8	0.057 8	0.061 9	2.521 6	2.956
MCUKF($\sigma=5$)	1.932 3	2.207 2	1.556 0	0.127 9	0.136 3	0.034 0	0.065 7	0.069 2	2.845 7	2.881
MCUKF($\sigma=7$)	1.961 6	2.175 6	1.514 6	0.134 0	0.140 6	0.034 1	0.070 6	0.072 3	3.197 3	2.621
MCUKF($\sigma=9$)	1.997 6	2.174 0	1.485 1	0.137 8	0.143 4	0.034 2	0.073 3	0.074 4	3.429 7	2.457
MCUKF($\sigma=15$)	2.062 5	2.196 1	1.448 5	0.142 3	0.147 6	0.034 7	0.077 2	0.077 0	3.723 1	2.222
MCUKF($\sigma=30$)	2.102 1	2.213 1	1.488 5	0.144 4	0.149 7	0.034 9	0.079 3	0.078 3	3.867 6	2.056

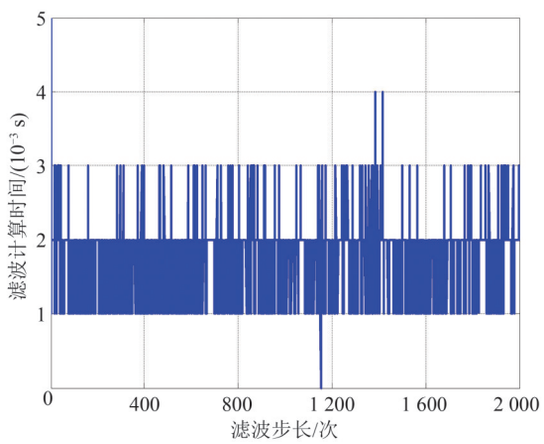


图 10　MCUKF 计算耗时变化曲线

Fig. 10　MCUKF Calculation Time Change Curve

仿真实验结果表明:在高斯噪声干扰下,UKF滤波性能优于MCUKF;在重尾非高斯噪声干扰下,MCUKF滤波性能优于UKF。通常MCUKF不动点迭代算法仅需要很少的迭代次数即可收敛到最优状态,较小的核带宽使得MCUKF的鲁棒性更强(相对于重尾非高斯噪声干扰),但过小的核带宽可能导致滤波发散,而核带宽趋于无穷大时MCUKF等价于UKF。下一步的研究方向为具有自适应带宽的MCUKF。

参　考　文　献

[1] 林雪原, 姚力波, 孙炜玮, 等. 基于多尺度的组合导航系统状态估计及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2020.
LIN Xueyuan, YAO Libo, SUN Weiwei, et al. State Estimation of Integrated Navigation System Based on Multi-scale and Its Application[M]. Beijing: Science Press, 2020.

[2] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2012.
QIN Yongyuan, ZHANG Hongyue, WANG Shuhua. Kalman Filter and Integrated Navigation Principle[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2012.

[3] 丁国强, 马军霞, 熊明, 等. SINS的SRC-KF姿态估计算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2016, 41(3): 367-372.
DING Guoqiang, MA Junxia, XIONG Ming, et al. The SINS' SRC-KF Attitude Estimation Modeling Algorithm[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(3): 367-372.

[4] 张小红, 陶贤露, 王颖喆, 等. 城市场景智能手机GNSS/MEMS融合车载高精度定位[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1740-1749.
ZHANG Xiaohong, TAO Xianlu, WANG Yingzhe, et al. MEMS-Enhanced Smartphone GNSS High-Precision Positioning for Vehicular Navigation in Urban Conditions[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1740-1749.

[5] JULIER S, UHLMANN J, DURRANT-WHYTE H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477-482.

[6] 李荣冰, 刘建业, 赖际舟, 等. Sigma-Point直接式卡尔曼滤波惯性组合导航算法[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1018-1022.
LI Rongbing, LIU Jianye, LAI Jizhou, et al. Sigma-Point Direct Kalman Filtering Algorithm for Inertial Integrated Navigation System[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(7): 1018-1022.

[7] 吴骁航. 非理想情况下非线性系统的滤波及信息融合算法[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2019.
WU Xiaohang. Filtering and Information Fusion Algorithms Under Non-ideal Condition[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019.

[8] HUANG Y L, ZHANG Y G, LI N, et al. A Robust Gaussian Approximate Fixed-Interval Smoother for Nonlinear Systems with Heavy-Tailed Process

and Measurement Noises[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(4): 468-472.

[9] 黄玉龙, 张勇刚, 武哲民, 等. 带有色厚尾量测噪声的鲁棒高斯近似滤波器和平滑器[J]. 自动化学报, 2017, 43(1): 114-131.
HUANG Yulong, ZHANG Yonggang, WU Zhemin, et al. Robust Gaussian Approximate Filter and Smoother with Colored Heavy Tailed Measurement Noise[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(1): 114-131.

[10] LIM C P, VOLAKIS J L, SERTEL K, et al. Indoor Propagation Models Based on Rigorous Methods for Site-Specific Multipath Environments[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006, 54(6): 1718-1725.

[11] CHEN B D, XING L, ZHAO H Q, et al. Generalized Correntropy for Robust Adaptive Filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(13): 3376-3387.

[12] WANG Y, PAN C H, XIANG S M, et al. Robust Hyperspectral Unmixing with Correntropy-Based Metric[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(11): 4027-4040.

[13] SHI L M, LIN Y. Convex Combination of Adaptive Filters Under the Maximum Correntropy Criterion in Impulsive Interference[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(11): 1385-1388.

[14] CHEN B D, XING L, LIANG J L, et al. Steady-State Mean-Square Error Analysis for Adaptive Filtering Under the Maximum Correntropy Criterion [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(7): 880-884.

[15] 徐开俊, 张榕, 杨泳, 等. 基于最大相关熵的GPS/INS组合导航融合算法研究[J]. 现代计算机, 2022, 28(17): 52-56.
XU Kaijun, ZHANG Rong, YANG Yong, et al. Research on GPS/INS Integrated Navigation Fusion Algorithm Based on Maximum Correlation Entropy [J]. *Modern Computer*, 2022, 28(17): 52-56.

[16] 周伟超. 基于最大相关熵卡尔曼滤波的组合导航方法[J]. 信息技术, 2022, 46(9): 78-83.
ZHOU Weichao. Integrated Navigation Method Based on Maximum Joint Entropy Kalman Filter [J]. *Information Technology*, 2022, 46(9): 78-83.

[17] 罗凯鑫, 吴美平, 范颖. 基于最大熵方法的鲁棒自适应滤波及其应用[J]. 系统工程与电子技术, 2020, 42(3): 667-673.
LUO Kaixin, WU Meiping, FAN Ying. Robust Adaptive Filtering Based on Maximum Entropy Method and Its Application[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2020, 42(3): 667-673.

[18] HOU B W, HE Z M, LI D, et al. Maximum Correntropy Unscented Kalman Filter for Ballistic Missile Navigation System Based on SINS/CNS Deeply Integrated Mode[J]. *Sensors*, 2018, 18(6): 1724.

[19] LIU X, QU H, ZHAO J H, et al. Maximum Correntropy Unscented Kalman Filter for Spacecraft Relative State Estimation[J]. *Sensors*, 2016, 16(9): 1530.

[20] 高兵兵, 高社生, 胡高歌, 等. 基于极大似然准则与滚动时域估计的自适应UKF算法[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(7): 1629-1637.
GAO Bingbing, GAO Shesheng, HU Gaoge, et al. Adaptive UKF Based on Maximum Likelihood Principle and Receding Horizon Estimation[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(7): 1629-1637.

[21] 林雪原, 刘丽丽, 董云云, 等. 改进的GNSS/SINS组合导航系统自适应滤波算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(1): 127-134.
LIN Xueyuan, LIU Lili, DONG Yunyun, et al. Improved Adaptive Filtering Algorithm for GNSS/SINS Integrated Navigation System[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(1): 127-134.

[22] 林雪原, 王萍, 许家龙, 等. 基于序贯UKF的GNSS/CNS/SINS组合导航最优融合算法[J]. 大地测量与地球动力学, 2022, 42(12): 1211-1215.
LIN Xueyuan, WANG Ping, XU Jialong, et al. An Optimal Fusion Algorithm for GNSS/CNS/SINS Integrated Navigation Based on Sequential UKF[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2022, 42(12): 1211-1215.

[23] 朱璐瑛, 孙炜玮, 刘成铭, 等. 多传感器组合导航系统的联邦UKF算法研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(7): 91-98.
ZHU Luying, SUN Weiwei, LIU Chengming, et al. Research on Federal UKF Algorithm for Multi-Sensorintegrated Navigation System[J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrumentation*, 2022, 36(7): 91-98.

[24] CHEN B D, LIU X, ZHAO H Q, et al. Maximum Correntropy Kalman Filter[J]. *Automatica*, 2017, 76: 70-77.

[25] CHEN B D, WANG J J, ZHAO H Q, et al. Convergence of a Fixed-Point Algorithm Under Maximum Correntropy Criterion[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(10): 1723-1727.

[26] YANG Y, SONG L, XU T. Robust Estimator for Correlated Observations Based on Bifactor Equivalent Weights[J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(6): 353-358.