引文格式：孙兴华,邹娟茹,贺里梅. 基于参考椭球面的大地线表达算法研究与仿真[J]. 地理空间信息, 2026, 24(1): 75-78. doi:10. 3969/j.issn. 1672-4623.2026.01.016

基于参考椭球面的大地线表达算法研究与仿真

孙兴华[1]，邹娟茹[2*]，贺里梅[3]
（1. 陕西省交通规划设计研究院有限公司，陕西 西安 710065；2. 陕西农业职业技术大学，陕西 咸阳 712100；
3. 青海省自然资源综合调查监测院，青海 西宁 810001）

摘　要：通过探讨大地线在参考椭球面上的微分方程，延伸到克莱劳方程在大地主题解算中的特有性质，结合Bessel大地主题正反算，提出基于参考椭球面的大地线空间内插求解算法，有效解决了赤道处求解大地线出现奇异、长度超10 000 km时大地方位角出现象限转向判别等问题。借助Visual StudioV6.0，编制了内插点坐标精确求解的算法程序；并通过算例数值求解与仿真绘制，对大地线内插算法与可视化进行了测试。在大地线长度反解精度上，最高求解精度在子午圈0°和180°方向，为1.33 cm，最大差异在平行圈90°和270°方向，为18.7 cm。结果表明，通过大地线等间距内插算法，基于参考椭球面逼近、仿真绘制大地线真实、可靠，在大地线解算与可视化的现实场景中，具有较好的应用价值。

关键词：大地线；Bessel大地主题解算；大地方位角；克莱劳方程；内插；仿真
中图分类号：P226　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2026）01-0075-04

Research and Simulation on the Expression Algorithm of Geodetic Line Based on Reference Ellipsoid Surface

SUN Xinghua[1], ZOU Juanru[2], HE Limei[3]
(1. Shaanxi Provincial Transport Planning Design and Research Institute Co., Ltd., Xi'an 710065, China;
2. Shaanxi Agriculture and Forestry Technology University, Xianyang 712100, China;
3. Natural Resources Comprehensive Investigation and Monitoring Institute of Qinghai Province, Xining 810001, China)

Abstract: By investigating the differential equations of geodesic lines on the reference ellipsoid and extending to explore the unique properties of Clairaut's equation in geodetic theme calculation, combining with Bessel's geodetic theme direct and inverse calculation, we developed a spatial interpolation algorithm for geodesic line based on reference ellipsoid surface, which could effectively resolve two critical issues, including the singularity in geodesic line calculation at the equator and the quadrant orientation judgment of geodetic azimuth when geodesic line length exceeded 10 000 km. We implemented an accurate computational program for interpolation point coordinates using Visual StudioV6.0, and demonstrated the algorithm's reliability in geodesic line interpolation by numerical case studies and simulation visualization. The results reveal that the maximum calculation accuracy reaches 1.33 cm along the 0° and 180° meridians, while the maximum deviation of 18.7 cm occurs along the 90° and 270° parallels. The findings confirm that the algorithm achieves authentic simulation of geodesic lines through reference ellipsoid approximation, showing significant practical value in geodetic line calculation and visualization applications.

Key words: geodetic line, Bessel geodetic theme calculation, geodetic azimuth, Clairaut's equation, interpolation, simulation

大地线是地球参考椭球面上两点间最短的一条空间三维曲线，通常利用勒让德级数式、高斯平均引数、Bessel大地主题等方法进行求解[1-4]，但在大地线的绘制与表达方面，鲜有为之。大地水准面是与平均海水面重合并延伸到大陆内部的水准面，而参考椭球面又是与大地水准面极为接近、能用数学方程表示的椭球面[5-7]，因此以大地线为基准线、参考椭球面为基准面，对大地线进行精密求解并实现三维可视化仿真，可为船只远洋航行精密导航、国界线精确划定、椭球体地壳板块数值模拟中的块体建模、规避长度或角度投影变形而构建椭球面三维电子地图等方面提供支持。本文首先借助Bessel大地主题解算理论和克莱劳方程精确求解大地线；再根据大地线常数，以大地线空间内插为基本思想，计算大地线上内插点位空间大地直角坐标；最后通过Visual StudioV6.0编程环境实现了算法的程序编制。将该方法应用于测试案例，获得了较好的大地线内插解算与表达仿真效果。

项目来源：杨凌职业技术学院自然科学研究基金资助项目（ZK21-30）；陕西省科技厅重点研发计划资助项目（2025NC-YBXM-211）。
第一作者简介：孙兴华（1978—），硕士，高级工程师，从事大地测量、公路勘测设计等工作，E-mail：5445836@qq.com。
通信作者：邹娟茹（1981—），硕士，副教授，研究方向为无人机航测、三维建模，E-mail：46061266@qq.com。

1 大地线空间内插原理与算法

1.1 大地线内插原理

大地线上每点的密切面都包含该点的曲面法线，曲面法线互不相交，因此是一条空间曲面曲线。在规则球面上，大圆弧（球面上的法截线）对应大地线；但在参考椭球体面上，除两点均位于大地子午线或纬线上外，大地线均位于其两个端点的正反法截线之间，因此基于椭球面严密绘制一条大地线并不容易。借鉴平面圆弧内插的思想，通过解算大地线，求解其若干内插点，再利用内插点位的空间大地直角坐标进行展绘，首尾相连逼近一条大地线，内插点间隔越小，越逼近大地线[8-11]。对大地线进行内插求解后，通过模型展绘形成的大地线见图1。

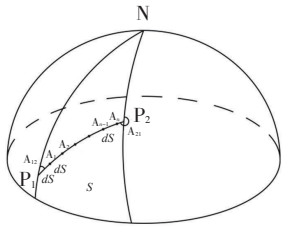


图1 参考椭球面上大地线示意图

1.2 基本算法

若要求解大地线内插点空间坐标，则需先对大地线进行主题解算。大地线是椭球面上一条双曲率空间曲线，而大地线微分方程（式（1））则表示了 dB、dL 和 dA 与 dS 的关系。克莱劳定理（式（2））是解算椭球面上大地元素的基础。对于椭球面上任意一条大地线，每点的平行圈半径与其大地方位角正弦的乘积是一个常数，当获得大地线常数后，根据前一航路点平行圈半径，即可求解大地方位角与当前航路点空间位置坐标。因此，克莱劳定理的应用贯穿整个导航参数计算始终，为椭球面上计算大地元素创造了理论条件[8-12]。

$$\begin{cases} dB=\dfrac{\cos A}{M}dS \\ dL=\dfrac{\sin A}{N\cos B}dS \\ dA=\dfrac{\sin A}{N}\tan B dS \end{cases} \tag{1}$$

$$r_B\sin A=\mathrm{C} \tag{2}$$

式中，dB、dL、dA 与 dS 分别为纬度增量、经度增量、大地方位角增量和大地线弧素；r 为平行圈半径；M、N 分别为子午圈曲率与卯酉圈曲率半径；C为大地线常数。

大地线空间内插点求解算法流程包括：①输入已知大地坐标点 $P_1(B_1, L_1)$、$P_2(B_2, L_2)$；②借助Bessel大地主题反算求解大地线长 S、大地方位角 A_{12}、反方位角 A_{21}；③利用克莱劳恒等式、P_1、A_{12}求解 P_1 点所在 r 与C，C在大地线上任一位置均满足克莱劳恒等式；④通过 P_1、A_{12}、内插间隔 dS 求解大地线第1内插点 I_1；⑤利用克莱劳恒等式、I_1 与C，求解 I_1 至第2内插点 I_2 的大地方位角 A_1，此时结合 dS 求解 I_2；⑥循环上述步骤，直至完成所有大地线内插点 I_i 大地坐标的解算；⑦将内插点大地坐标 $I_i(B_i, L_i)$ 转换至空间大地直角坐标 (X_i, Y_i, Z_i)，完成大地线展绘。

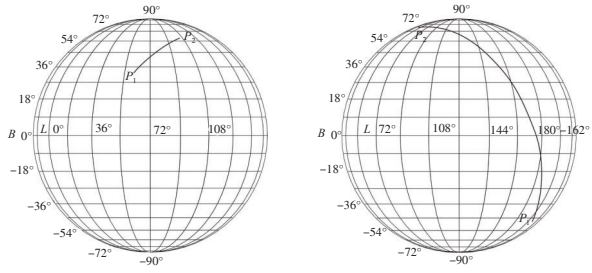
2 案例分析

为验证本文基于参考椭球面的大地线内插求解算法，借助Visual StudioV6.0编程环境，编制了该算法的解算程序，并通过两个案例展示了大地线的求解与表达，均采用1975国际参考椭球参数。

案例一：已知参考椭球面上两点 P_1（33°24′16.254 180″, 66°20′31.549 060″）、P_2（55°49′56.665 383″, 100°12′55.679 842″），通过Bessel大地主题反算获取两点间的大地线长3 601 297.295 729 m、大地线正、反方位角分别为35°53′32.284 536″、240°29′47.894 632″。利用克莱劳恒等式求解P_1所在的r与C（3 124 730.315 041）。由 P_1 坐标、A_{12}、dS 求解得到 I_1 的坐标为（33°28′39.146 501″, 66°24′18.620 438″），dS 为10 000 m。同时，利用克莱劳恒等式、I_1 与C，求解 I_1 至 I_2 的 A_1，继而求解 I_2。重复上述步骤，求解各内插点至下一内插点位前进方向的大地方位角 A_i，得到所有内插点位大地坐标及其空间大地直角坐标。如表1、图2a所示，大地线共内插360个点位，内插点纬度与经度不断增加，案例内插点前进方向大地方位角均位于第一象限，A_i 随纬度的升高逐渐增大，最终通过其空间大地直角坐标在参考椭球面上进行展绘。内插求解过程中，各点位所在的 r、A_i 各不相同，但与C均满足克莱劳恒等式。

案例二：已知点 P_1(−46°28′39.214 698″, −160°52′57.264 795″)、P_2(68°08′9.548 005″, 62°55′11.987 457″)分别位于南半球与北半球，经差约为136°，大地线内插方向自 P_1 向 P_2，经Bessel大地主题反解获得大地线长、正反方位角分别为16 563 212.930 533 m、329°52′54.316 526″、67°56′54.646 724″，C为2 207 873.552 075，dS 为10 000 m，共内插1 656个点。解算结果见表2，通过其空间大地直角坐标展绘于参考椭球面（图2b），由于两点经差约为136°，大地线是椭球面上两点间最

短的一条空间曲线，因此起始大地方位角为329°52′54.316 526″（第四象限），内插点纬度逐渐靠近赤道，过赤道后（561号内插点）继续向北，经度向西不断减小，至−180°后由180减至P_2点62°55′11.987 457″，从空间大地直角坐标Z值上看，同样561号点由负转正，较560号内插点更接近赤道。各内插点处的A_i在大地线前段由起始方位角329°52′54.316 526″不断变大，过赤道后开始减小，至最后一个内插点248°08′59.836 404″达到最小值，且自起始点至赤道，第四象限A_i正弦绝对值递减，r递增，过赤道后内插点A_i在第四象限正弦绝对值递增，r递减，该过程C恒定不变，均满足克莱劳恒等式。



a 案例1　　b 案例2

图2　基于参考椭球面的大地线表达案例结果

表1　案例一解算结果

序号	A_i	大地坐标		空间大地直角坐标		
		B_i	L_i	X_i/m	Y_i/m	Z_i/m
1	35°55′37.418 585″	33°28′39.146 501″	66°24′18.620 438″	2 131 602.914 427	4 880 232.647 597	3 498 255.502 624
2	35°57′43.004 472″	33°33′01.919 970″	66°28′06.073 048″	2 124 435.386 157	4 878 481.913 193	3 505 005.444 608
3	35°59′49.043 538″	33°37′24.574 075″	66°31′53.908 418″	2 117 262.630 435	4 876 719.174 455	3 511 746.703 723
4	36°01′55.537 132″	33°41′47.108 296″	66°35′42.128 081″	2 110 084.664 993	4 874 944.435 912	3 518 479.263 405
5	36°04′02.486 606″	33°46′09.522 117″	66°39′30.733 576″	2 102 901.507 576	4 873 157.702 120	3 525 203.107 114
…	…	…	…	…	…	…
358	60°15′08.688 009″	55°44′16.200 431″	99°55′13.190 937″	−620 026.887 461	3 545 200.272 968	5 248 063.550 606
359	60°22′00.507 809″	55°46′56.355 642″	100°03′31.346 887″	−627 872.015 052	3 539 660.735 627	5 250 850.479 798
360	60°28′53.483 044″	55°49′35.947 773″	100°11′50.637 259″	−635 715.605 521	3 534 112.532 551	5 253 624.467 330

表2　案例二解算结果

序号	A_i	大地坐标		空间大地直角坐标		
		B_i	L_i	X_i/m	Y_i/m	Z_i/m
1	329°55′44.530 414″	−46°23′59.013 947″	−160°56′52.162 415″	−4 164 885.786 826	−1 438 341.300 086	−4 595 999.415 827
2	329°58′34.042 790″	−46°19′18.675 729″	−161°00′46.392 797″	−4 172 440.017 047	−1 435 648.987 399	−4 590 025.714 473
3	330°01′22.855 450″	−46°14′38.200 778″	−161°04′39.959 321″	−4 179 984.001 834	−1 432 953.149 583	−4 584 040.666 624
4	330°04′10.971 652″	−46°09′57.589 824″	−161°08′32.865 352″	−4 187 517.722 476	−1 430 253.793 194	−4 578 044.286 870
…	…	…	…	…	…	…
559	339°31′23.013 312″	−00°08′32.979 369″	176°26′51.198 910″	−6 365 863.708 936	395 220.405 093	−15 756.177 235
560	339°31′06.347 127″	−00°03′27.534 996″	176°24′59.251 760″	−6 365 664.625 456	398 676.345 378	−6 374.449 225
561	339°30′49.506 382″	00°01′37.909 452″	176°23′07.304 939″	−6 365 449.801 269	402 131.299 892	3 007.294 773
562	339°30′32.490 896″	00°06′43.353 870″	176°21′15.357 960″	−6 365 219.236 905	405 585.260 092	12 389.031 403
563	339°30′15.300 485″	00°11′48.798 154″	176°19′23.410 335″	−6 364 972.932 934	409 038.217 438	21 770.737 312
…	…	…	…	…	…	…
1654	248°33′58.705 688″	68°14′04.815 955″	63°25′00.414 355″	1 061 428.011 908	2 121 168.818 151	5 900 848.560 514
1655	248°21′28.104 142″	68°12′06.324 188″	63°11′32.102 225″	1 071 269.792 215	2 120 035.728 318	5 899 486.265 577
1656	248°08′59.836 404″	68°10′06.741 910″	62°58′06.117 333″	1 081 108.954 190	2 118 897.456 453	5 898 109.453 310

3　大地线的仿真表达

3.1　仿真可视化表达

早期大地测量学者在解算大地线时，多在解算距离、方法、精度上取得了重要的研究成果[12−15]，鲜有大地线展绘方面的案例，本文在大地线数值解算的基础上，重点提出了基于参考椭球面的大地线展绘方案。

基于本初子午线与赤道交点坐标(0°,0°)，沿顺时针方向每间隔22.5°绘制5 000 km和10 000 km两条大地线，为避免解算出现奇异，纬度设置为极小值10^{-15}。利用本文算法获取各方向上两条大地线内插点大地坐标与空间大地直角坐标，并基于参考椭球模型进行展绘仿真测试，效果见图3，绿线为5 000 km大地线，黑线为10 000 km大地线，此外在45°、202.5°、292.5°三个方向增添了15 000 km大地线（红线）。由10 000 km大地线的解算和仿真绘制结果来

看，由于该距离约为1/4周长，因此本初子午线以东大地线终点处大地线方位角近乎90°，本初子午线以西大地线至终点处的大地方位角接近270°，均与终点处子午线呈垂直关系；而15 000 km大地线在向东过程中越过10 000 km后前进方位角在第一、二象限相互转换，在向西的大地线过10 000 km后在第三、四象限相互转换。

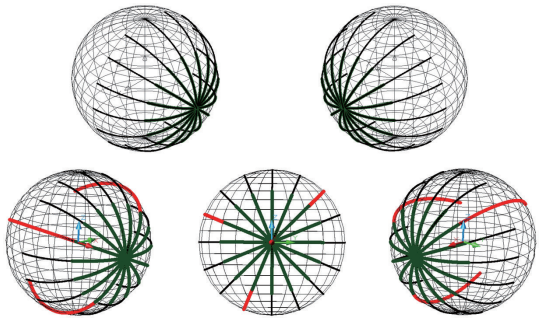


图3 基于参考椭球面的大地线表达仿真效果

3.2 大地线仿真精度分析

大地线的反算精度反映了基于Bessel大地主题求解的算法精度问题。以仿真案例5 000 km大地线为研究对象，每条大地线在Bessel大地主题正解中设计长度为5 000 km，求得每个方向上的大地线终点，现将起点与各终点作为已知起算数据，利用Bessel大地主题反算，求解各方向反解距离、大地方位角及其精度。反算结果见表3，设计方位角自00°00′00″沿顺时针方向，每间隔22.5°求解一条大地线，可以看出，基于Bessel大地主题反算后的A_{12}差值最大值在45°、135°、225°、315°方向，量值约为0.812″，最小差异量级在0.000 01″；在反算大地线长度上，设计距离为5 000 km，反解精度在分米级，差值最大值在平行圈90°、270°方向，约为18.7 cm，最高精度在子午圈0°、180°方向，为1.33 cm。5 000 km大地线反算精度损失曲线见图4，呈以π为周期的余弦曲线。

表3 椭球面5 000 km大地线解算精度分析

序号	设计方位角	A_{12}	差值	S/m	差值/cm
1	00°00′00″	00°00′00.000 938″	0.000 938″	5 000 000.013 286	1.33
2	22°30′00″	22°29′59.474 827″	−0.525 173″	4 999 999.987 489	−1.25
3	45°00′00″	44°59′59.188 178″	−0.811 822″	4 999 999.926 577	−7.34
4	67°30′00″	67°29′59.376 871″	−0.623 129″	4 999 999.850 412	−14.96
5	90°00′00″	90°00′00.000 019″	0.000 019″	4 999 999.812 335	−18.77
6	112°30′00″	112°30′00.622 246″	0.622 246″	4 999 999.847 040	−15.30
7	135°00′00″	135°00′00.811 033″	0.811 033″	4 999 999.927 095	−7.29
8	157°30′00″	157°30′00.524 451″	0.524 451″	4 999 999.985 457	−1.45
9	180°00′00″	180°00′00.000 921″	0.000 921″	5 000 000.013 314	1.33
10	202°30′00″	202°29′59.474 105″	−0.525 895″	4 999 999.989 575	−1.04
11	225°00′00″	224°59′59.187 389″	−0.812 611″	4 999 999.926 101	−7.39
12	247°30′00″	247°29′59.376 189″	−0.623 811″	4 999 999.846 142	−15.39
13	270°00′00″	269°59′59.999 316″	−0.000 684″	4 999 999.812 362	−18.76
14	292°30′00″	292°30′00.621 564″	0.621 564″	4 999 999.851 373	−14.86
15	315°00′00″	315°00′00.810 243″	0.810 243″	4 999 999.927 657	−7.23
16	337°30′00″	337°30′00.523 537″	0.523 537″	4 999 999.985 919	−1.41

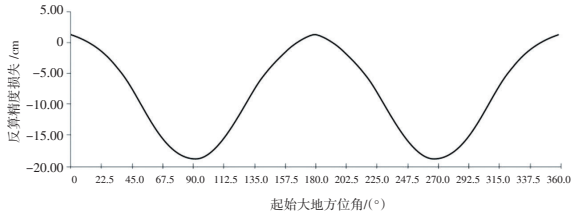


图4 5 000 km大地线反算精度损失曲线

此外，将勒让德级数法、高斯平均引数法与本文算法进行了精度对比，结果见表4。在求解方向上，由于本文在0~360°方向其精度损失呈双余弦对称关系，因此选取了0°、45°、90°三个方向进行对比，可以看出，勒让德级数法在3个方向的误差均约为几十米，高斯平均引数法则达到了200 m，而本文算法在长距离求解中可控制在毫米级，适用于长距离大地线的求解。

表4 5 000 km大地线不同方法大地线解算精度分析对比

大地方位	勒让德级数法解算长度/m	高斯平均引数法解算长度/m	本文算法解算长度/m
0°	4 999 943.459 731	4 999 802.400 156	5 000 000.013 286
45°	4 999 924.976 134	4 999 810.546 120	4 999 999.926 577
90°	4 999 937.412 684	4 999 786.050 941	4 999 999.812 335

4 结 论

本文全面阐述了大地线解算、内插点坐标求解算法，在各求解环节中也遇到了不同问题与技术瓶颈，但经过反复测试与完善，最终得以解（下转第84页）