引文格式：苗长伟. 地铁变形监测小波去噪与灰色-时序模型研究[J]. 地理空间信息, 2023, 21(10): 76-79. doi:10. 3969/j.issn. 1672-4623.2023.10.019

地铁变形监测小波去噪与灰色-时序模型研究

苗长伟[1]
（1. 中核勘察设计研究有限公司，河南 郑州 450000）

摘　要：近年来，我国城市建设迅速发展，路面交通不堪重负，发展地下交通成为一种趋势，由此引发的地表沉降是值得我们重视的问题。以河南省某市市民文化服务区地下交通工程为例，进行了小波去噪及灰色时序模型的研究。针对观测数据中存在的粗差，采用多种小波模型进行探测、剔除工作。在此基础上建立灰色预测模型、时间序列预测模型以及两者的组合模型。结果表明灰色模型对于波动性数据处理效果不佳，而时间序列模型短期预报比较精确，组合模型能够兼顾数据的波动性和趋势性，预测精度最高，能够满足地铁区间隧道地表变形精度要求。

关键词：地铁变形监测；小波粗差探测；小波去噪；灰色-时序组合模型
中图分类号：P258　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2023）10-0076-04

Study on Wavelet Denoising and Gray-Time Series Model for Metro Deformation Monitoring

MIAO Changwei[1]
(1. China Nuclear Industry Survey Design & Research Co., Ltd., Zhengzhou 450000, China)

Abstract: With the rapid development of urban construction in China recently and the overwhelmed road traffic, the underground traffic thus becomes a trend resulting in land subsidence, a problem worth our attention. Taking the metro project in Shandong Province for example, we studied the wavelet denoising and grey-time series model. We adopted various wavelet models to detect and eliminate the errors in the observed data. On the basis of this, we established grey model, time series model and grey-time series model. The results show that the grey model is not effective in processing volatile data, while the time series model is more accurate in short-term forecast. The grey-time series model can take into account the volatility and trend of data with the highest prediction accuracy, and meet the accuracy requirements of land deformation of metro tunnel.

Key words: metro deformation monitoring, wavelet gross error detection, wavelet denoising, grey-time series model

城市地铁隧道的开挖，破坏了原有应力平衡，当隧道上方荷载过大时会引发地表变形，严重时会导致地面坍塌，给国家和社会带来巨大损失。在地铁的建设和运营过程中，对地表的监测是非常重要的一道工序。在地铁隧道施工前，沿地铁方向布设纵横观测线。进行多期观测，通过测量数据求得地表变形值，建立多种预测模型，对比分析选择最优模型，进行地表变形实时预测，实现地表临界变形预警。国内外许多学者对此进行了大量的研究和分析，其中潘国荣提出了基于AR而且运用至CAR对时间序列统一建模的新思路，最终证实了时间序列预测模型预测精度较高，运用范围比较广[1-7]。

本文以河南某市市民文化服务区地铁8号线纵向线上Q16号观测点为例，采用小波对原始数据进行降噪处理。随后建立灰色、时序以及两者的结合模型，实验成果显示组合模型预测精度最高，这对揭示地铁隧道变形机理，实现地铁的安全建设和运营具有重大意义。

1　实测数据的小波去噪处理

1.1　小波去噪原理

连续函数信号 $f(t)$ 的小波变换公式如下[8-9]：

$$WT_f(a,b)=|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t=\left\langle f,\psi_{a,b}\right\rangle \quad a\neq 0 \tag{1}$$

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{2}$$

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\infty \tag{3}$$

式中，$\hat{\psi}(\omega)$ 为 $\psi(t)$ 的傅里叶变换，同时也可以表示为：

收稿日期：2021-08-18。
项目来源：国家自然科学基金资助项目（41774039）。
作者简介：苗长伟（1986—），硕士，高级工程师，研究方向工程测量、工程勘察，E-mail：Pingzhangran@163.com。

$$f(t)=C_{\psi}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(t)WT_f(a,b)\mathrm{d}b\frac{da}{|a|^2} \tag{4}$$

1.2　小波去噪评价标准

本文以均方根误差(RMSE)以及信噪比(SNR)为评价模型指标，其表达式如下：

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(\hat{f}(i)-f(i))^2}{n}} \tag{5}$$

$$\mathrm{SNR}=10\log(P_s/P_n) \tag{6}$$

式中，$P_s=\dfrac{\sum f^2(n)}{n}$，$P_n=\dfrac{\sum(f(n)-\hat{f}(n))^2}{n}$

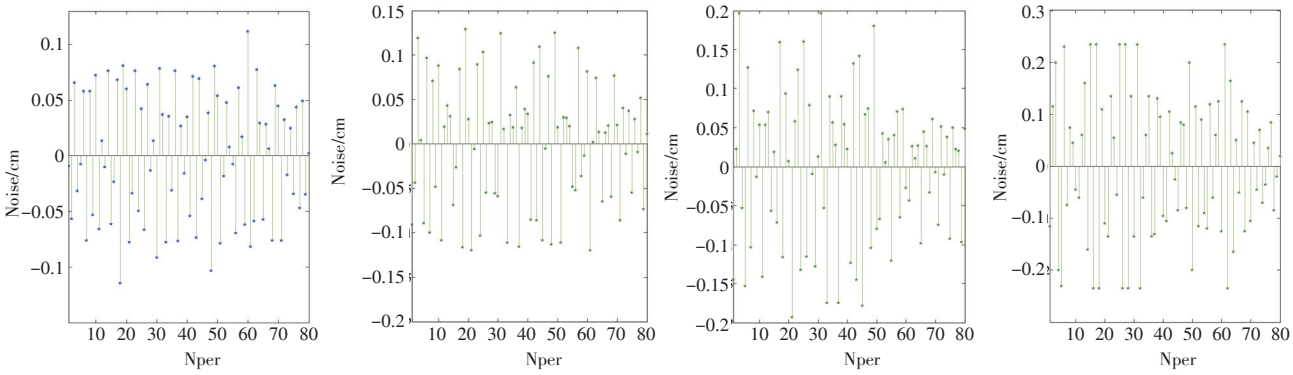
1.3　小波阈值去噪处理

设一含包含误差的一维信号模型公式：

$$S(t)=f(t)+\sigma\cdot e(t)\quad(t=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{7}$$

式中，$f(t)$ 为低频真实信号；$e(t)$ 为高频噪声；$S(t)$ 为含有噪声的信号；t 为等间隔时间；σ 为噪声水平。我们的目标是将真实信息和误差信息区分开，从而留取真实信息[10-12]。

本次测量工作高程基准网布设了8个控制点，包括3个已知点。对地铁隧道监测工作使用精度0.6 mm的Trimble DINI03电子自动水准仪，按照国家规定的二等水准测量要求进行高程测量工作[13-14]，采用往返测，若两次测量数据均符合精度要求，则取其平均值作为观测数据。2018年7月9日开始观测，2018年9月26日结束观测工作，期间每天观测一次，获取80期数据。以地铁8号线纵向线上Q16号观测点为例。建立了多种小波模型进行去噪实验，发现db5小波1层分解降噪最佳。分别采用启发式阈值（heursure）、固定阈值（sqtwolog）、无偏似然估计阈值（rigrsure）、极大极小阈值（minimaxi）结合db5小波1层分解进行降噪处理，实验结果表明rigrsure均方根误差RMSE最小，数值为0.009，信噪比（SNR）最高，值为76.962。现用db5小波1层分解对实测数据进行小波降噪处理，分解图如图1所示，观测数据去噪前后对比图见图2。



a rigrsure阈值效果图　b heursure阈值效果图　c sqtwolog 阈值效果图　d minimaxi阈值效果图

图1　去噪效果图

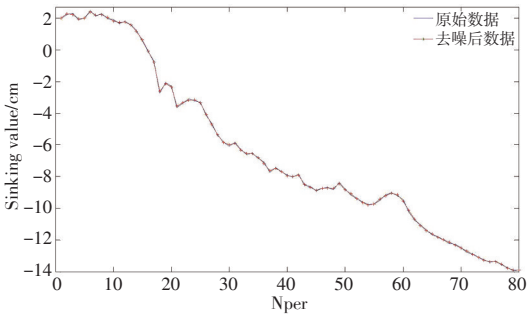


图2　观测点Q16沉降曲线

由图2可知，通过小波去噪处理能够减弱原始数据中的噪声，使沉降数据变得更加平滑，能更好地反映变形情况。

2　灰色-时间序列分析理论

2.1　灰色模型预测

设 $X^{(0)}$ 为GM（1，1）建模序列：

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)) \tag{8}$$

$X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的1-AGO序列：

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)\ ,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

令 $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值(MEAN)生成序列：

$$z^{(1)}(k)=0.5\,x^{(1)}(k)+0.5\,x^{(1)}(k-1) \tag{10}$$

GM（1，1）的灰微分方程为：

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b \tag{11}$$

式中，a 为发展系数；b 为灰色作用量。设 $\hat{\alpha}$ 为待估参数向量，$\hat{\alpha}=(a,b)^{\mathrm{T}}$，则灰微分方程（11）的最小二乘估计参数列可以表示为[15]：

$$\hat{\alpha}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y_n \tag{12}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ \cdots & \cdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},\quad Y_n=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \cdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix}$$

称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b \tag{13}$$

为灰色微分方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的白化方程。

取 $x^{(1)}(0)=x^{(0)}(1)$，求得

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=[1-e^{a}](x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-ak},k=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

2.2 模型检验

残差序列 e 的表达式为：

$$e(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k),k=1,2\cdots,N \tag{15}$$

式中，原始数据方差为 S_1^2，残差序列方差为 S_2^2，$x^{(0)}$ 的均值为 $\hat{x}^{(0)}$，残差 e 的均值为 $\bar{e}$ 则

$$S_1^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[x^{(0)}(k)-\bar{x}^{(0)}]^2$$

$$S_2^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[e(k)-\bar{e}]^2$$

式中，后验差 $C=\frac{S_2}{S_1}$，小误差概率 $P=P\{|e(k-\bar{e})|<0.674\,5S_1\}$（为使误差概率落在25%到75%区域内，查询正态分布表可得，25%和75%分别为−0.674 5和+0.674 5。）

灰色模型可以利用较少的数值进行较好的预测，对降噪后的实测数值进行建模实验发现20维的建模数据预计效果较好。我们采用51~70期作为建模数据，对71~80期数据进行预测。根据地铁8号线纵向线上Q16号观测点的观测数值，形成数据矩阵，并利用最小二乘原理估计参数，求出GM（1，1）模型参数为 $\hat{\alpha}=[a\ \ b]^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y_n=[-0.02\ \ -7.27]^{\mathrm{T}}$，根据式（14）最终求得GM（1，1）模型为 $7.35e^{-0.02k}$。最后求得后验方差比值 C =0.33，小误差概率 P =1，根据表1中的检验标准，模型通过检验且精度为优。预测71~80期数据如表2所示。

表1 后验差检验判别参照表

P	C	模型精度
>0.95	<0.35	优
>0.80	<0.5	合格
>0.70	<0.65	勉强合格
<0.70	>0.65	不合格

2.3 时间序列理论

时间序列能够通过自身运动特点对未来发展趋势做出预测，时间序列模型有自回归（AR）模型、滑动平均（MA）模型以及自回归滑动平均（ARMA）模型。

平稳、正态、零均值的时间序列 $\{x_t\}$，x_t 的取值与前 n 步中 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-n}$ 的取值有关，同时与前 m 步的噪声 $a_{t-1},a_{t-2},\cdots,a_{t-n}$ 也有关，一般的自回归滑动平均模型（ARMA）表达式为：

$$x_t=\phi_1x_{t-1}+\phi_2x_{t-2}+\cdots+\phi_nx_{t-n}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_m\varepsilon_{t-m} \tag{16}$$

当 $\theta_i=0$ 时：

$$x_t=\phi_1x_{t-1}+\phi_2x_{t-2}+\cdots+\phi_nx_{t-n}+\varepsilon_t \tag{17}$$

称为 n 阶自回归模型，记为 AR(n)。

当 $\phi_i=0$ 时，

$$x_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_m\varepsilon_{t-m} \tag{18}$$

称为 n 阶滑动平均模型，记为 MA(n)。

式（15）中，n 为自回归阶数，m 为滑动平均阶数，θ_i、ϕ_i 分别为滑动平均参数、自回归参数，ε_t 为独立误差项。

对地铁隧道原始数据进行平稳检测，发现沉降曲线不满足要求，则进行二次差分，差分处理后数据满足要求，在此过程实现了序列零均值化处理。本文采用AIC标准来判断模型阶数，通过计算最终求得 $n=0$，$m=4$ 时，AIC取得最小值，则预测模型为MA（4）。对模型残差进行卡方检验，得出该残差为白噪声。使用该模型对71~80期数据进行预测，预测结果如表2所示。

3 灰色−时序模型的建立

本文将灰色模型以及时间序列模型有效的结合在一起，运用灰色模型提取时间序列的趋势项，再用时序模型对灰色模型拟合后的残差序列进行建模，取两者之和作为模型的形式，组合模型能够兼顾数据的波动性和趋势性。组合方式表示为：

$$Y_t=d_t+x_t \tag{19}$$

式中，Y_t 为降噪的观测数据；x_t 为灰色模型提取的趋势项；d_t 为时间序列模型拟合的随机项。

为了精确地分析不同模型在地铁隧道地表变形中的预测效果，本文采用小波去噪后时间序列模型、小波去噪后组合模型以及小波去噪前组合模型分别对71~80期数据进行预计处理。预测结果如表2所示。

由表2可知4种预计结果中小波去噪组合模型预计结果精度最高，其最小相对误差为0.08%，最大相对误差为1.38%。

表2　实测数据与预测结果

期数	实测值	小波处理后的时间序列模型			小波处理后GM（1，1）模型			小波处理前组合模型			小波处理后组合模型		
		预测值/mm	残差/mm	相对误差/%	预测值/mm	残差/mm	相对误差/%	预测值/mm	残差/mm	相对误差/%	预测值/mm	残差/mm	相对误差/%
71	−12.77	−12.68	−0.09	0.74	−12.73	−0.04	0.34	−12.92	0.15	1.17	−12.91	0.14	1.09
72	−12.86	−12.87	0.01	0.12	−12.83	−0.03	0.26	−12.69	−0.17	1.30	−12.68	−0.18	1.38
73	−12.82	−13.08	0.26	2.03	−12.90	0.08	0.62	−12.81	−0.01	0.04	−12.84	0.02	0.13
74	−13.24	−13.32	0.08	0.57	−13.00	−0.24	1.85	−13.01	−0.23	1.76	−13.07	−0.17	1.26
75	−13.40	−13.52	0.12	0.90	−13.08	−0.32	2.39	−13.21	−0.19	1.41	−13.32	−0.08	0.58
76	−13.33	−13.70	0.37	2.74	−13.18	−0.15	1.12	−13.26	−0.07	0.54	−13.17	−0.16	1.21
77	−13.56	−13.97	0.41	3.02	−13.23	−0.33	2.40	−13.52	−0.04	0.29	−13.39	−0.17	1.27
78	−13.73	−14.20	0.47	3.42	−13.32	−0.41	3.02	−13.87	0.14	1.05	−13.64	−0.09	0.65
79	−13.79	−14.44	0.65	4.68	−13.36	−0.43	3.10	−14.15	0.36	2.62	−13.91	0.12	0.89
80	−13.89	−14.59	0.70	5.00	−13.43	−0.46	3.31	−14.20	0.31	2.20	−13.90	0.01	0.08

由表1、2可得，小波去噪后组合模型预计值比小波去噪前时间序列预计值以及灰色模型预计值更接近实测值，说明组合模型可以兼顾变形的趋势性和波动性，可以表现出变形体的变形趋势。同时小波降噪后组合模型预计精度高于小波去噪前组合模型预计精度，说明经过小波粗差探测和去噪处理，能够提高模型的预计精度。

4　结　语

通过对小波去噪后时间序列模型、小波去噪后灰色模型以及小波去噪前后组合模型的研究，结论如下：

1）对比4种阈值方法对实测数据进行降噪处理，最后发现无偏似然估计阈值降噪效果最好。小波去噪后组合模型预测精度高于去噪前组合模型预测精度，说明小波去噪能够有效提高模型预测精度。

2）灰色模型可以处理非平稳时间序列，但是模型是单调变化趋势，不能同时兼顾数据中的随机性以及趋势性。时间序列模型一般处理平稳零均值数列，但是现场观测数据大多都是不平稳的，因此其应用范围会受到限制。两者结合能够同时兼顾变形的趋势性和波动性。对比分析多种预测模型得知，小波处理后灰色–时序组合模型预测精度最高。

参考文献

[1] 潘国荣. 大型钢结构变形测试方法的研究与实践[J]. 测绘信息与工程,2005(3):45-47

[2] 唐天琦,杨国东. 时间序列分析在地铁沉降监测中的应用[J]. 测绘与空间地理信息,2015,38(3):205-207

[3] 孙奇涵,王永岩,张永利. 利用灰色模型预测巷道围岩变形[J]. 应用力学学报,1997(3):138-142

[4] 朱志枫. 基于小波和时间序列分析组合模型的地铁隧道变形预测研究[D]. 南京:南京师范大学,2017

[5] 梁新美,胡友健,陈刚. 等维新息灰色模型在深基坑变形预测中的应用[J]. 地理空间信息,2007,5(4):93-94

[6] 王高峰,郭宁,邓兵,等. 不同组合模型区域滑坡易发性及精度分析[J]. 西北地质,2021,54(2):259-272

[7] 尚军亮. 时间序列预测方法及在隧道控制中的应用研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2010

[8] 武文锐,师思超. 基于小波去噪的灰色模型在变形监测中的应用[J]. 地理空间信息,2021,19(5):85-88

[9] 王旭昭,侯磊,苏龙,等. 改进灰色GM(1,1)模型在滑坡预测中的应用[J]. 地理空间信息,2016,14(11):88-90

[10] 赵紫龙. 基于小波分解的差分灰色神经网络-AR模型及其在地铁隧道沉降预测中应用研究[J]. 测绘通报,2020(增刊):99-103

[11] 甘祥前,任超,刘林波. 基于小波去噪的非等间距多点灰色预测模型[J]. 测绘地理信息,2018,43(3):41-44.

[12] 沈哲辉,黄腾,葛文,等. 基于小波分析的灰色-神经网络组合模型在大坝变形预测中的应用[J]. 测绘工程,2015,24(11):51-53

[13] 殷书彦,杜庆东. 基于蚁群算法的ACO-BP神经网络性能研究[J]. 黑龙江科技信息,2015(22):178

[14] 严容. 基于小波去噪的BP神经网络在变形预测中的应用[D]. 北京:中国地质大学(北京),2014

[15] 张文祥,黄张裕,于小桐,等. 新灰色组合模型在沉降变形预测中的作用[J]. 地理空间信息,2018,16(4):107-109