引文格式：罗保林, 金飞, 罗亮. 自适应卡尔曼滤波在GNSS沉降监测中的应用[J]. 地理空间信息, 2023, 21(10): 73-75. doi:10. 3969/j.issn. 1672-4623.2023.10.018

自适应卡尔曼滤波在GNSS沉降监测中的应用

罗保林[1]，金　飞[1]，罗　亮[1]
（1. 成都市勘察测绘研究院，四川 成都 610031）

摘　要：为解决GNSS-RTK实时测量中存在的数据波动性大，难以满足高精度沉降监测需求的问题，通过引入方差补偿自适应卡尔曼滤波，对原始测量数据进行滤波去噪，实现了绝大部分白噪声的过滤和修正。同时，对原始测量数据与滤波数据进行分析比对，滤波前原始数据标准差在7 mm左右，方差补偿法滤波后数据标准差在3 mm左右，实现了两倍多的精度提升。实践证明，方差补偿自适应卡尔曼滤波在抑制滤波发散和提高监测数据精度上具有显著的效果。

关键词：沉降监测；卡尔曼滤波；自适应卡尔曼滤波；方差补偿
中图分类号：P258　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2023）10-0073-03

Application of Adaptive Kalman Filter in GNSS Settlement Monitoring

LUO Baolin[1], JIN Fei[1], LUO Liang[1]
(1. Chengdu Institute of Survey & Investigation, Chengdu 610031, China)

Abstract: To solve large data volatility in GNSS-RTK real time measurement, which was difficult to meet the needs of high-accuracy deformation monitoring, we introduced variance compensated adaptive Kalman filter to denoise the original data, filtering and correcting most of the white noise. At the same time, we compared the standard deviation of original data with the filtered data, and found that the standard deviation before filtering was about 7 mm, the standard deviation after filtering by variance compensation method was about 3 mm, realizing more than twice the accuracy improvement. Practice has proved that the variance compensated adaptive Kalman filter has a significant effect on restraining filter divergence and improving monitoring data accuracy.

Key words: settlement monitoring, Kalman filtering, adaptive Kalman filter, variance compensation

卡尔曼滤波作为一种最小二乘原理下的最优估计，在去除白噪声方面具有不错的效果，本文将自适应卡尔曼滤波的方差补偿法应用到RTK实时监测数据的处理过程中，以提升监测数据质量，为决策部门提供可靠的变形数据，在工程项目的安全性评价及预测等方面具有重要意义。

1　卡尔曼滤波模型

卡尔曼滤波在随机变量估计的理论基础上又引入了状态方程的概念。它把测量信号当作是在系统白噪声作用下的输出量，把前一个状态的状态量作为输入量，这种输入量与输出量之间的函数关系用状态方程来描述。由于所用的信息都是时域内的量，所以除了可以对一维平稳的随机过程进行滤波估计，还可以对多维的、非平稳的随机过程进行估计[1]。

在不考虑系统控制作用的情况下，变形监测在离散线性系统中的状态方程与观测方差为：

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \dot{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}_k&=\begin{bmatrix}I & \Delta t_k I\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \dot{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}_{k-1}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\Delta t_k^2 I\\ \Delta t_k I\end{bmatrix}W_{k-1}\\ L_k&=\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \dot{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}_k+V_k\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 为位置向量，$\dot{\boldsymbol{X}}$ 为速度向量，它们共同组成系统状态向量；Δt 为相邻测量值间的时间间隔，下标 k 为当前要进行滤波的时刻。上述方程可简化为：

$$\left.\begin{aligned}X_k&=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}X_{k-1}+\boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}W_{k-1}\\ L_k&=H_kX_k+V_k\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{X}_k$ 为状态向量；$\boldsymbol{L}_k$ 为观测向量；$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}$ 为状态转移矩阵；$\boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}$ 为噪声控制矩阵；W_{k-1} 为系统噪声；$\boldsymbol{H}_k$ 为观测方程系数矩阵；V_k 为观测噪声。

如果系统动态噪声与观测噪声满足以下特性

$$\begin{cases}E[W_k]=0, & E[W_kW_j^{\mathrm{T}}]=Q_k\sigma_{kj}\\ E[V_k]=0, & E[V_kV_j^{\mathrm{T}}]=R_k\sigma_{kj}\\ E[W_kV_j^{\mathrm{T}}]=0\end{cases}\tag{3}$$

收稿日期：2022-07-10。
项目来源：成都市科技项目（VQ21SS1135Y17004）。
第一作者简介：罗保林（1993—），硕士，工程师，研究方向为精密工程测量与变形监测，E-mail：923853136@qq.com。

即观测误差和系统误差都是满足均值为零的正太分布且它们都互不相关。则系统过程噪声方差阵 $\boldsymbol{Q}_k$ 非负定，系统观测噪声方差阵 $\boldsymbol{R}_k$ 正定。

k 时刻的观测值为 Z_k。那么 X_k 的估值 $\hat{X}_k$ 可通过下列方程解算。

状态一步预测：

$$\hat{X}_{k,k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{X}_{k-1} \tag{4}$$

状态估计：

$$\hat{X}_k=\hat{X}_{k,k-1}+K_k[L_k-H_kX_{k,k-1}] \tag{5}$$

滤波增益矩阵

$$K_k=\boldsymbol{P}_{k,k-1}H_k^{\mathrm{T}}[H_k\boldsymbol{P}_{k.k-1}H_k^{\mathrm{T}}+\mathrm{R}_k]^{-1}$$

$$\text{或 } K_k=\boldsymbol{P}_kH_k^{\mathrm{T}}\mathrm{R}_k^{-1} \tag{6}$$

一步预测误差方差阵

$$\boldsymbol{P}_{k,k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

估值误差方差阵

$$\boldsymbol{P}_k=[I-K_kH_k]\boldsymbol{P}_{k,k-1}[I-K_kH_k]^{\mathrm{T}}+K_k\mathrm{R}_kK_k^{\mathrm{T}}$$

$$\text{或 } \boldsymbol{P}_k^{-1}=\boldsymbol{P}_{k,k-1}^{-1}+H_k^{\mathrm{T}}\mathrm{R}_k^{-1}H_k \tag{8}$$

从测量量和状态量传入的次序来看，卡尔曼滤波在一个周期内的计算过程可分为两步：滤波预测过程和状态更新过程。

在传入观测值与观测噪声之前的所有计算中仅仅使用了与当前状态相关的一些数据和参数。从时间的递进关系来看，滤波过程是以 $K-1$ 时刻来估推 K 时刻的值，因此过程表现为滤波预测过程。后续部分的计算是对滤波预测值的修正计算，计算增益矩阵的目标就是要准确、合理地使用观测值 $Z(k)$ 来修正对 k 时刻的一步预测状态值，使其拥有最优效果，因此该过程表现为状态更新。

2 方差补偿自适应卡尔曼滤波

方差补偿自适应卡尔曼滤波原理是在滤波的过程中对系统噪声方差阵进行实时估计，以补偿滤波中对系统噪声估计的不足[2]，从而可以在一定程度上避免常规卡尔曼滤波的发散问题。

假设动态噪声和观测噪声为正态序列。定义一步预测残差为：

$$\boldsymbol{V}_{k+l}=\boldsymbol{L}_{k+l}-\hat{\boldsymbol{L}}_{k+l/k} \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{L}_{k+l}$ 和 $\hat{\boldsymbol{L}}_{k+l/k}$ 为第 $k+1$ 期观测值和它的最优估值，这里的最佳观测值不同于上一节的伪观测值。

则 $\boldsymbol{V}_{k+l}$ 为正态向量，即 $\boldsymbol{V}_{k+l}\sim N(0,S_{vv})$。方差矩阵 $\boldsymbol{s}_{vv}$ 为：

$$\boldsymbol{s}_{vv}=H_{k+l}\boldsymbol{\Phi}_{k+l/k}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\Phi}_{k+l/k}^{T}H_{k+l}^{T}+R_{k+l}+\sum_{i=1}^{l}H_{k+l}\boldsymbol{\Phi}_{k+l/k+i}\Gamma_{k+l/k+i-1}\boldsymbol{Q}_{k+i-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k+l/k+i-1}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{k+l/k+i}^{T}H_{k+l} \tag{10}$$

$$H_{k+l}\boldsymbol{\Phi}_{k+l/k+i}\boldsymbol{\Gamma}_{k+l/k+i-1}=A_{k+l/k+i}=[\alpha_{hj}^{k+l/k+i}] \tag{11}$$

假定 $\boldsymbol{Q}_{k+i-1}$ 在观测时段 $t_{k+1},t_{k+2},\cdots,t_{k+N}$ 上为常数对角阵，即

$$\boldsymbol{Q}_{k+i-1}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & 0 & \cdots & 0\\ & \sigma_{22}^2 & & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{rr}^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q} \tag{12}$$

因为：

$$E(V_{k+l}^{\mathrm{T}}\cdot V_{k+l})=\mathrm{trace}(E(V_{k+l}\cdot V_{k+l}^{\mathrm{T}}))=\mathrm{trace}(S_{vv}) \tag{13}$$

于是记

$$V_{k+l}^{\mathrm{T}}\cdot V_{k+l}=\mathrm{trace}(S_{vv})+\eta_{k+l} \tag{14}$$

式中，η_{k+l} 为零均值随机变量，$l=1$，$2,\cdots,N$。

令

$$E_{k+l}=V_{k+l}^{\mathrm{T}}V_{k+l}-\mathrm{trace}(H_{k+l}\boldsymbol{\Phi}_{k+l/k}P_k\boldsymbol{\Phi}_{k+l/k}^{\mathrm{T}}H_{k+l}^{\mathrm{T}})-\mathrm{trace}(R_{k+l})$$

$$E=[E_{k+1},\cdots,E_{k+N}]^{\mathrm{T}}$$

$$A=[A_{k/1},\cdots,A_{k/N}]^{\mathrm{T}}$$

则有

$$E=A\,\mathrm{diag}\,\boldsymbol{Q}+\eta \tag{15}$$

上式为关于 $\mathrm{diag}\,\boldsymbol{Q}$ 的线性方程组，当 $N\geqslant r$ 时有唯一解。记 $\mathrm{diag}\,\boldsymbol{Q}$ 的最小二乘（LS）估计为

$$\mathrm{diag}\,\hat{\boldsymbol{Q}}=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}E \tag{16}$$

$\hat{\boldsymbol{Q}}$ 即为系统噪声在当前时刻的最优估值。由于自适应卡尔曼滤波的方差补偿法能够实时动态的估计系统的动态方差阵，从而使得解算结果能够快速适应不同的变形情况，能有效的克制滤波的发散现象。但这都是以较大计算量为代价的，特别是在状态向量的维数比较多时最为明显，因此，应用中必须要考虑的一个因素。

3 应用实验

本文采用方差补偿自适应卡尔曼滤波对某个连续运行测试站点的3 d高程监测数据进行处理，分析其在连续性监测系统中的有效性和适用性[3]。

该测试站点的定位采用单基站CORS进行实时差分以获取RTK固定解数据。站点的采样间隔为5 s，24 h不间断工作，1 d的数据量大约有18 000个左右，足够进行精度分析。每天数据采集完成后，均对GNSS天线进行了一定量的升降来模拟沉降变形。

第一天的测量原始数据与滤波结果如图1所示，第二天将天线高相对于第一天升高1 mm，原始测量数据

与滤波数据如图2所示，第三天将天线高相对于第二天升高3 mm，原始测量数据与滤波结果如图3所示。

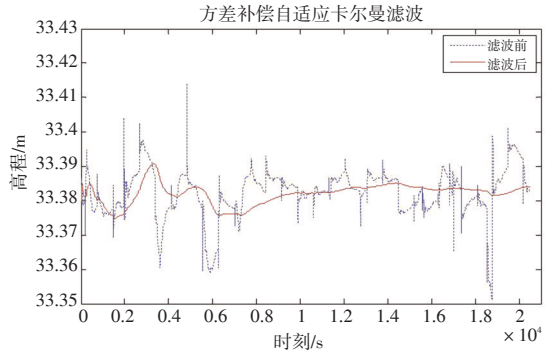


图1　第一天原始测量数据与滤波后数据对比图

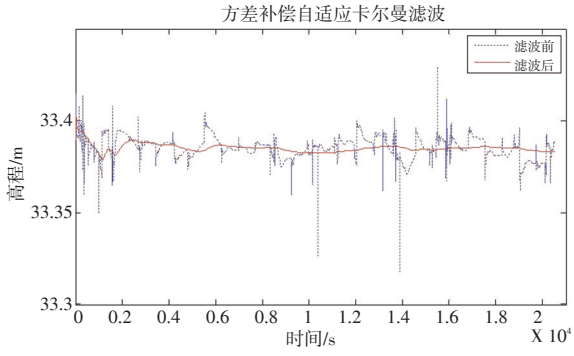


图2　第二天原始测量数据与滤波后数据对比图

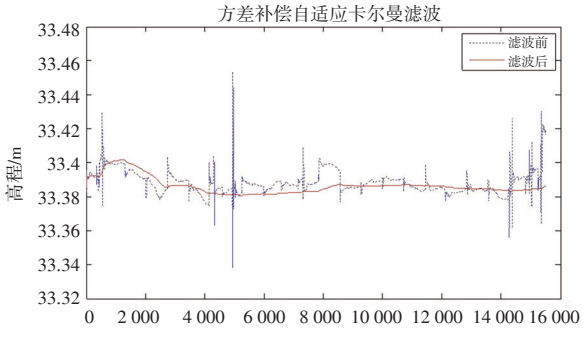


图3　第二天原始测量数据与滤波后数据对比图

上述数据均是在假设这一天内该站点没有任何位移的条件下进行处理的，系统的扰动主要是观测误差和仪器本身的测量误差。由图可以看出，在每一天的原始观测数据中某些时刻的波动还是相对比较大的，第一天最大和最小的2个观测值之差达7.15 cm，第二天观测数据较差最大为1.59 cm，第三天观测数据较差最大为12.29 cm；滤波后的数据平滑效果都特别好，对于噪声作用下波动较大的时刻，噪声都被很好的过滤掉了，数据整体要平稳很多，精度也有大幅提高，如表1所示。

表1　H方向滤波前后均值和标准差对比表/cm

数值	第一天		第二天		第三天	
	观测值	滤波值	观测值	滤波值	观测值	滤波值
平均值	33.382 2	33.382 0	33.385 4	33.385 2	33.386 3	33.388 2
标准差	0.007 0	0.003 0	0.005 7	0.002 3	0.006 1	0.002 1

从这三天的数据中可知，第一天和第二天的观测平均值和滤波平均值基本相同，但原始观测值标准差较大，数据波动性高，从而对滤波过程也产生了一定的影响，如图1可见，滤波后的数据在一开始也产生了一定的波动，该波动也导致了滤波后的数据标准差也相对偏大，但相对于原始数据还是有较大的改善。

从数据中看，第一天和第二天高程相差3 mm左右，而理论差距应为1 mm，高程的变化未准确的发现。第二天相对于第三天滤波后高程相差3 mm左右，理论差距也为3 mm，高程变化被完整体现。分析原因可能有两种，一是由于算法原因加之RTK测量本生精度的不足，导致了1 mm这种过于微小的变形无法很好的体现；二是可能由于第一天的数据本身波动性就相对较大，导致初值不准确。当然，具体是哪个原因，还需要后续的进一步研究。从精度来看，原始观测值的标准差是滤波后标准差的两倍多，整体滤波后精度是有很大提高的，且滤波后的瞬时数据波动性较小，能够比较好地反映监测对象的实际状态[4-7]。

4　结　语

方差补偿自适应卡尔曼滤波在对高采样率实时监测数据的处理过程是较为稳定的，滤波后沉降值的收敛性也较好，且滤波后的残差及残差的波动性都比原始数据要小很多，数据较为平稳，数据处理过程中也没有出现发散现象。因此，方差补偿自适应卡尔曼滤波在提高连续性监测数据的精度上具有较好的效果，在高精度变形监测中具有较高的应用参考价值。

参考文献

[1]　许开宇. 基于红外图像的运动船舶检测及跟踪技术的研究[D]. 上海:上海海事大学,2006

[2]　高雅萍,张勤. 方差补偿自适应卡尔曼滤波在GPS滑坡监测中的应用研究[J]. 水土保持研究,2008,15(6):150-152

[3]　蒋法文,刘可胜,杭玉付,等. 煤矿开采沉陷自动化监测实时数据采集终端系统研究[J]. 矿山测量,2014(5):93-97

[4]　范雷刚,田林亚,陈喜凤. 不同的自适应卡尔曼滤波在地铁隧道沉降监测数据处理中的应用研究[J]. 隧道建设,2014,34(7):649-652

[5]　张军,刘祖强,王红,等. 顾及降水因子的卡尔曼滤波在滑坡变形数据处理中的应用[J]. 测绘科学,2012,37(6):58-61

[6]　张豪,张利莎. 基于卡尔曼滤波的大跨度斜拉桥变形预测研究[J]. 浙江工业大学学报,2021,49(6):650-655

[7]　王宾宾. 卡尔曼滤波算法在隧道结构沉降分析降噪中的应用[J]. 北京建筑大学学报,2021,37(3):64-69