引文格式：黄志强,李瑞红. 时变参数灰色模型在变形监测中的应用[J]. 地理空间信息, 2024, 22(6): 71-73. doi:10. 3969/j.issn. 1672-4623.2024.06.016

时变参数灰色模型在变形监测中的应用

黄志强[1]，李瑞红[2]
（1. 茂名市自然资源勘探测绘院，广东 茂名 525000；2. 广东省测绘工程有限公司，广东 广州 515700）

摘　要：为提高沉降数据的准确预测并分析监测目标的变形趋势，避免重大工程事故的发生，建立了基于优化背景值的时变参数的灰色模型。首先，介绍了传统灰色GM(1,1)模型与新陈代谢灰色模型；其次，基于时变参数优化灰作用量的原理，建立了基于时变参数的灰色GM(1,1)模型和新陈代谢灰色模型，并采用黄金分割法优化灰色模型中权重参数，建立优化背景值的时变参数的灰色模型；最后，以某矿区地表沉降监测数据为例进行预测结果验证与精度评定。实验结果表明，基于优化背景值的时变参数的灰色模型预测精度最高，更加贴合地表监测数据变形趋势。

关键词：灰色模型；时变参数；背景值优化；精度检验
中图分类号：P258　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2024）06-0071-03

Application of Time-varying Parameter Grey Model in Deformation Monitoring

HUANG Zhiqiang[1], LI Ruihong[2]
(1. Maoming Institute of Natural Resources Exploration and Mapping, Maoming 525000, China;
2. Guangdong Surveying and Mapping Engineering Co., Ltd., Guangzhou 515700, China)

Abstract: In order to improve the accuracy of settlement data, analyze the deformation trend of monitoring targets, and avoid the occurrence of major engineering accidents, we established a time-varying parameter grey model based on optimized background values. Firstly, we introduced the traditional grey GM(1,1) model and the metabolic grey model. Then, we established the grey GM(1,1) model and the metabolic grey model based on time-varying parameters based on the principle of optimizing the grey action quantity, used the golden section method to optimize the background value in the grey model, and established a grey model with time-varying parameters to optimize the background value. Finally, taking the monitoring data of surface subsidence in a mining area for example, we verified the prediction results and evaluated the accuracy. The experimental results show that this model has the highest prediction accuracy and is more suitable for the deformation trend of surface monitoring data.

Key words: grey model, time-varying parameter, optimized background value, accuracy inspection

灰色GM（1，1）模型作为灰色系统理论的基础部分，且理论符合大多数工程的变形规律，成为变形监测的常用模型[1-3]。若GM（1，1）模型在微分方程建立的过程中构造的背景值不准确，会出现模型的拟合与预测结果偏离实际值较大情况。对此，相关学者采用改进的灰色模型进行数据分析。改进模型可大致分为3种：①针对灰色模型本身以及数据变化规律等提出灰色GM（1，N）模型、新陈代谢灰色模型[4-6]等。②针对建立微分方程时其发展系数和灰色作用量不再为固定值，发展系数成为随时间不变的固定量，灰色作用量也会随时间发生变化，从而建立时变参数灰色模型。③针对灰色模型的背景值表达式提出优化背景值的方法，一类是对背景值公式的替换，如梯形公式、辛普森公式等[7-8]；另一类是调整计算背景值的前后紧邻值的权重，通过构造目标函数采用一维无约束最优化方法获取最优权重参数，如黄金分割法[9]，最速下降法等。

本文以某煤矿开采地表沉陷沉降监测点的实际累计沉降监测数据为例，分别采用时变参数灰色模型以及优化背景值的时变参数灰色模型对观测数据进行预测，验证优化背景值的时变参数灰色模型的精准性。

1　灰色模型

1.1　灰色GM（1，1）模型

按照建立GM（1，1）模型的思想[10-11]，将采集得到的沉降观测原始观测数据以序列的形式表示为：

收稿日期：2023-02-13。
项目来源：广东省科技计划资助项目（2018B020207002）。
第一作者简介：黄志强（1989—），测绘工程师，主要从事测绘地理信息生产与研究工作，E-mail：huangzhiqiang0213@163.com。

$x^{(0)}=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\right\}$，将原始数据进行累加计算，生成一次累加序列。

$$x^{(1)}=\left\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\right\} \tag{1}$$

式中，$x^{(1)}(t)=\sum_{k=1}^{t}x^{(0)}(k)\quad t=1,2,\cdots,n$。

式（1）得到的一次累加序列满足白化微分模型：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_1x^{(1)}=b_1 \tag{2}$$

通过最小二乘准则与微分方程求解待求参数估值为：$[a_1\ b_1]=\left(\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}Y_1$

式中，$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}-Z^{(1)}(t_2) & 1\\ -Z^{(1)}(t_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -Z^{(1)}(t_k) & 1\end{bmatrix}$，$Z^{(1)}(t_k)=0.5\times\left(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)\right)$，

$\boldsymbol{Y}_1=\left(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n)\right)^{\mathrm{T}}$。

考虑到初始条件$x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$代入式（2）中即可求解微分方程通解，得到各个观测值的预测值，需要通过预测值累减进行还原。

1.2 新陈代谢灰色模型

实际情况中，随着时间的推移，灰色模型会不断有随机的驱动或扰动因素进入灰色系统影响灰色系统的发展。而新陈代谢模型侧重于在补充新数据的同时会去掉旧数据，从而可以更好地体现出灰色系统的发展趋势，因此新陈代谢模型具有比传统灰色模型更高的实用性。

以灰色GM（1，1）模型为例，新陈代谢GM（1，1）模型的基本思想是通过对初始的时间序列数据进行更新达到对GM（1，1）模型的改进效果[5-6, 12]。

建立新陈代谢GM（1，1）模型过程为：首先，根据传统GM（1，1）模型得到最新一期数据$x^{(0)}(n+1)$；其次，去除原始序列最老信息，即去除式（1）中的$x^{(0)}(1)$；最后，用新的数据序列$x^{(0)'}=\{x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n+1)\}$重新建立GM（1，1）模型。按照上述步骤反复进行数据更新，依次建立n维新陈代谢模型，直到预测值达到预测精度为止，即为新陈代谢GM（1，1）模型。

2 时变参数灰色模型

2.1 时变参数灰色模型建立

相关学者提出为优化灰色GM（1，1）模型拟合与预测的精度，以时变参数优化灰作用量，建立了一种基于时变参数的GM（1，1）模型[13]。其主要思想是采用线性时间函数代替固定不变的灰作用量b，因此本文在传统GM（1，1）模型和新陈代谢灰色GM（1，1）模型的基础上分别建立时变参数的灰色模型。

若采用时间的线性函数b_2+b_3t代替灰色作用量固定值b，此时GM（1，1）模型中式（2）微分方程的表达式变为：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_1x^{(1)}=b_2+b_3t \tag{3}$$

按照最小二乘准则求解参数估值为：

$$[a_1\ b_2\ b_3]=\left(\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2\right)^{-1}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}Y_2 \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}-Z^{(1)}(t_2) & 1 & 2\\ -Z^{(1)}(t_3) & 1 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -Z^{(1)}(t_k) & 1 & n\end{bmatrix}$。

同理，将待估参数以及初始条件代入式（5）微分方程中即可求解时变参数GM（1，1）模型表达式：

$$x^{(1)}(t)=\left[x^{(1)}(1)-\frac{b_2}{a_1}-\frac{b_3}{a_1}+\frac{b_3}{a_1^2}\right]e^{-a_1t}+\frac{b_2}{a_1}+\frac{b_3}{a_1}t(t+1)-\frac{b_3}{a_1^2} \tag{5}$$

2.2 基于优化背景值的时变参数灰色模型

2.2.1 背景值权重参数的优化方法

由$Z^{(1)}(t_k)=0.5\times\left(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)\right)$可知，在计算背景值时一般认为前后紧邻值是等权的。在观测精度相同的情况下，离预测时间原点越近的数据对预测模型的作用越大。因此，如果仍认为前后紧邻值是等权的，会导致模型预测出现较大偏差，因此应当调整权重，得到模型精度最佳的背景值。此时基于调整权重参数背景值表达式为：

$$Z^{(1)}(t_k)=\alpha x^{(1)}(n-1)+(1-\alpha)x^{(1)}(n) \tag{6}$$

计算权重参数α的实质是求解关于α的一元函数极小值问题，属于一维无约束最优化问题，相应的数值迭代方法为一维无约束搜索算法。由于黄金分割法可以适用于任何单峰函数求解极小值问题，也可以不要求函数是连续的，因此本文采用黄金分割法计算权重参数α。其具体计算步骤为：

1）原始观测值与预测值误差平方和最小作为目标函数f并确定权重参数区间$[x_1,x_2]$；

2）计算2个权重参数初始计算点$\alpha_1=x_1+0.382(x_2-x_1)$，$\alpha_2=x_1+0.618(x_2-x_1)$对应的目标函数值$f_1=f(\alpha_1)$，$f_2=f(\alpha_2)$；

3）若目标函数$f_1>f_2$，设$x_1'=\alpha_1$；否则设$x_2'=\alpha_2$；

4）当权重参数区间差值小于某一极小值终止迭代，并将最终区间中点 $\alpha=\frac{x'_1+x'_2}{2}$ 作为权重参数最优解。

2.2.2　背景值优化的时变参数灰色模型实现步骤

基于本文采用的黄金分割法计算背景值，因此以GM（1，1）模型为例，基于背景值优化的时变参数灰色模型具体计算步骤总结如下[12-13]：

1）根据原始观测数据建立时变参数GM（1，1），模型与时变参数新陈代谢模型得到预测值。

2）建立优化背景值的时变参数GM（1，1）模型与时变参数新陈代谢模型，其中权重参数 α 以0.01步长得到不同时变参数模型的预测值，以原始观测值与预测值误差平方和最小为准则确定最优权重参数 α。

3）不同模型预测结果精度对比分析。

3　案例分析

3.1　工程应用

本文以某矿区采空区倾向观测线F线中217号沉降监测点为例，共计14期，采用电子水准仪按照国家三、四等水准测量规范要求对沉降监测点的垂直位移进行观测。

3.2　预测模型结果分析

本文以前10期作为实验样本数据，以最后4期作为测试数据验证建立的灰色模型根据时变参数灰色模型建立的过程编制相应的计算机语言程序，输入沉降监测点原始数据，得到了预测值以及残差值，若考虑计算背景值中权重参数的问题，此时前后紧邻值是不再是等权的。根据基于背景值优化的时变参数灰色模型具体计算步骤，再次以沉降监测点作为原始数据进行模型建立与计算，得到了预测值和残差值结果。基于黄金分割法计算背景值的计算步骤权重参数 $\alpha=0.64$。4种预测模型的预测结果以及残差值如表1、2所示。

由表1可知，217号监测点采用时变参数灰色模型对监测点进行最后四期预测时，时变参数GM（1，1）模型计算得到的残差绝对值最大为59 mm，时变参数新陈代谢模型得到的残差绝对值最大为36 mm；2种模型的均方误差经计算分别为43、21 mm。

采用基于背景值优化的时变参数灰色模型对监测点进行预测时，背景值优化的时变参数GM（1，1）模型计算得到的残差最大值绝对值为36 mm，背景值优化的时变参数新陈代谢模型得到的残差最大值绝对值为16 mm；2种模型的均方误差经计算分别为28 、13 mm。

由表2可知，采用时变参数灰色模型对监测点进行最后四期预测时，时变参数GM（1，1）模型计算模型得到的残差最大绝对值为44 mm，时变参数新陈代谢模型得到的残差最大值绝对值为32 mm；2种模型的均方误差经计算分别为39、25 mm。

采用基于背景值优化的时变参数灰色模型对监测点进行预测时，背景值优化的时变参数GM（1，1）模型计算模型得到的残差最大绝对值为16 mm，背景值优化的时变参数新陈代谢模型得到的残差最大值绝对值为10 mm；2种模型的均方误差经计算分别为13、8 mm。

通过表1、2分析可知，通过4种灰色模型预测结果与实测值对比，可以看出基于背景值优化的时变参数灰色模型在4种预测方案中符合实测值的变化趋势，可以适用于工程应用。

表1　217号监测点不同灰色模型预测结果

观测期数	实测值/mm	时变参数GM（1，1）模型		时变参数新陈代谢模型		背景值优化的时变参数GM（1，1）模型		背景值优化的时变参数新陈代谢模型	
		预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm
11	1 077	1 103	−26	1 066	11	1 109	−32	1 092	−15
12	1 097	1 156	−59	1 133	−36	1 133	−36	1 113	−16
13	1 104	1 068	36	1 116	−12	1 119	−15	1 117	−13
14	1 115	1 160	−45	1 128	−13	1 089	26	1 122	−7

表2　221号监测点不同灰色模型预测结果

观测期数	实测值/mm	时变参数GM（1，1）模型		时变参数新陈代谢模型		背景值优化的时变参数GM（1，1）模型		背景值优化的时变参数新陈代谢模型	
		预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm	预测值/mm	残差值/mm
11	1 065	1 022	−43	1 033	−32	1 049	−16	1 055	−10
12	1 101	1 066	−35	1 075	−26	1 089	−12	1 092	−9
13	1 110	1 154	44	1 084	−26	1 113	3	1 105	−5
14	1 123	1 155	32	1 137	14	1 139	16	1 114	−9

（下转第93页）