引文格式：樊海青,马彦凤. 基于时变参数的灰色模型在变形监测中的应用[J]. 地理空间信息, 2024, 22(1): 74-77. doi:10. 3969/j.issn. 1672-4623.2024.01.017

基于时变参数的灰色模型在变形监测中的应用

樊海青[1]，马彦凤[2*]
（1. 广东省国土资源测绘院，广东 广州 510500；2. 广东省测绘工程有限公司，广东 广州 510700）

摘　要：针对传统灰色GM(1,1)预测模型拟合和预测精度较低的问题，建立了基于时变参数的灰色模型。首先介绍了传统灰色GM(1,1)和二阶GM(2,1)模型的建立过程；然后基于时变参数优化灰作用量的原理，建立了基于时变参数的灰色GM(1,1)模型和GM(2,1)模型；最后以两组矿区地表沉降监测数据为例，利用不同灰色模型方案进行预测对比，并评定了灰色模型的精度。结果表明，基于时变参数的GM(2,1)模型预测精度最高，灰色模型精度检验等级为Ⅱ级，说明该模型更加贴合矿区地表监测数据变形趋势。

关键词：灰色GM(1,1)模型；灰色GM(2,1)模型；时变参数；精度检验
中图分类号：P258　　**文献标志码：**B　　**文章编号：**1672-4623（2024）01-0074-04

Application of Grey Model Based on Time-varying Parameter in Deformation Monitoring

FAN Haiqing[1], MA Yanfeng[2]
(1. Guangdong Institute of Land and Resources Surveying and Mapping, Guangzhou 510500, China;
2. Guangdong Surveying and Mapping Engineering Co., Ltd., Guangzhou 510700, China)

Abstract: Aiming at the low fitting and prediction accuracy of traditional GM(1,1) prediction model, we established a grey model based on time-varying parameter in this paper. Firstly, we introduced the establishment processes of traditional grey GM(1,1) and second-order GM(2,1) model. Then, based on the principle of time-varying parameters to optimize grey action, we established grey GM(1,1) and GM(2,1) model based on time-varying parameter. Finally, taking the monitoring data of surface subsidence in the mining area for example, we carried out the prediction comparison and the accuracy evaluation of gray model through different gray model schemes. The experimental results show that GM(2,1) model based on time-varying parameter has the highest prediction accuracy, and the gray model accuracy test level is level II, illustrating GM(2,1) model based on time-varying parameter is more suitable for the deformation trend of surface monitoring data in this mining area.

Key words: grey GM(1,1) model, grey GM(2,1) model, time-varying parameter, accuracy test

灰色系统通过建模、预测和分析等过程，能从已有少量信息中提取有价值的信息，为多个领域的组织决策和控制提供依据。灰色模型是在贫信息的情况下进行建模，对少量的原始观测数据进行处理，生成新的数据序列，并通过建立与求解白化微分方程得到预测模型，因此被广泛应用于变形监测工程中[1-5]。利用灰色GM(1,1)模型建立变形监测预测模型的方法较普遍，但也会出现模型的拟合与预测结果与实际值偏离较大的情况，因此相关学者采用灰色Verhulst模型、灰色二阶GM(2,1)模型、灰色GM(1,*N*)模型[6-8]等改进灰色模型进行数据分析，其中灰色二阶GM(2,1)模型能反映序列的趋势性变化，对数据的变化趋势提取更加有效。传统灰色模型在建立白化微分方程时，发展系数和灰色作用量为固定值，但在相关文献中提出，在同一时间序列中发展系数是固定量，而灰色作用量会随时间发生变化，即具有时变性质。本文以矿区地表沉降实测数据为例建立灰色模型，根据灰色作用量时变性质和灰色二阶GM(2,1)模型的优势，建立了传统灰色模型和基于时变参数的灰色模型；并对比了不同灰色模型沉降观测的预测结果和精度，以验证基于时变参数的灰色模型在沉降观测和模型预测过程中的可靠性与优越性。

1　基于时变参数的灰色模型

1.1　灰色模型

基于时变参数的灰色模型是由传统灰色模型改进而来，本文主要介绍灰色GM(1,1)模型和GM(2,1)模型。

1.1.1　灰色GM(1,1)模型

假设存在一组原始观测数据序列，即[3-4]

收稿日期：2022-08-22。
项目来源：广东省科技计划资助项目（2018B020207002）。
第一作者简介：樊海青（1987—），工程师，主要从事测绘地理信息生产与研究工作，E-mail：fhq20220713@163.com。
通信作者：马彦凤（1988—），工程师，主要从事测绘地理信息生产与研究工作，E-mail：mayanfeng8808@21cn.com。

$$x^{(0)}=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\right\} \tag{1}$$

将原始数据进行累加，生成一次累加序列，即

$$x^{(1)}=\left\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\right\} \tag{2}$$

式中，$x^{(1)}(t)=\sum_{k=1}^{t}x^{(0)}(k)$，$t=1,2,\cdots,n$。

由于一次累加序列存在指数型增长的趋势，满足式（3）灰微分模型：

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+a_1x^{(1)}=b_1 \tag{3}$$

根据最小二乘法求解灰微分方程的待求参数估值，即

$$\left[a_1\ b_1\right]=\left(\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1 \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}-Z^{(1)}(t_2) & 1\\ -Z^{(1)}(t_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -Z^{(1)}(t_k) & 1\end{bmatrix}$，$Z^{(1)}(t_k)=0.5\times\left(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)\right)$；$\boldsymbol{Y}_1=\left(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n)\right)^{\mathrm{T}}$。

将a_1、b_1以及初始条件$x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$代入式（3），即可求解传统GM(1,1)模型的表达式：

$$x^{(1)}(t)=\left[x^{(1)}(1)-\frac{b_1}{a_1}\right]e^{-a_1t}+\frac{b_1}{a_1} \tag{5}$$

还原数列得到原始观测序列的预测值，即

$$x^{(0)}(t)=x^{(1)}(t)-x^{(1)}(t-1) \tag{6}$$

1.1.2　灰色GM(2,1)模型

不同于灰色GM(1,1)模型，灰色GM(2,1)模型除了对原始观测值进行了一次累加生成序列，还进行了一次累减生成序列。将式（1）中的原始数据进行累减，生成一次累减序列[9]，即

$$a^{(1)}x^{(1)}=\left\{a^{(1)}x^{(1)}(2),a^{(1)}x^{(1)}(3),\cdots,a^{(1)}x^{(1)}(n)\right\} \tag{7}$$

式中，$a^{(1)}x^{(1)}(t)=x^{(0)}(t)-x^{(0)}(t-1)$，$t=2,3,\cdots,n$。

此时灰色GM(2,1)模型满足的灰微分模型为：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{(1)}}{\mathrm{d}t^2}+a_2\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+a_3x^{(1)}=b_2 \tag{8}$$

以最小二乘法求解式（8）的待求参数估值为：

$$\left[a_2\ a_3\ b_2\right]=\left(\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2\right)^{-1}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2 \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & -Z^{(1)}(2) & 1\\ -x^{(0)}(3) & -Z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -x^{(0)}(n) & -Z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$，$Z^{(1)}(t_k)=-0.5\times\left(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)\right)$；$\boldsymbol{Y}_2=\left(a^{(1)}x^{(1)}(2),a^{(1)}x^{(1)}(3),\cdots,a^{(1)}x^{(1)}(n)\right)^{\mathrm{T}}$。

1.2　基于时变参数的灰色模型建立

张振超[10]等为优化灰色GM(1,1)模型拟合与预测精度，通过时变参数优化灰作用量，建立了一种基于时变参数的GM(1,1)模型，采用线性时间函数代替固定不变的灰作用量。因此，本文在传统GM(1,1)模型和GM(2,1)模型的基础上分别建立了基于时变参数的灰色模型[10-12]。

若以时间的线性函数b_3+b_4t代替灰色作用量固定值，传统GM(1,1)模型的灰微分方程表达式为：

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+a_1x^{(1)}=b_3+b_4t \tag{10}$$

以最小二乘法求解式（10）的待求参数估值为：

$$\left[a_1\ b_3\ b_4\right]=\left(\boldsymbol{B}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_3\right)^{-1}\boldsymbol{B}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1 \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}-Z^{(1)}(t_2) & 1 & 2\\ -Z^{(1)}(t_3) & 1 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -Z^{(1)}(t_k) & 1 & k\end{bmatrix}$。

将a_1、b_3、b_4以及初始条件$x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$代入式（10），即可求解基于时变参数的GM(1,1)模型表达式，即

$$x^{(1)}(t)=\left[x^{(1)}(1)-\frac{b_3}{a_1}-\frac{b_4}{a_1}+\frac{b_4}{a_1^2}\right]e^{-a_1t}+\frac{b_3}{a_1}+\frac{b_4}{a_1}t(t+1)-\frac{b_4}{a_1^2} \tag{12}$$

同理，GM(2,1)模型的灰微分方程表达式为：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{(1)}}{\mathrm{d}t^2}+a_2\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+a_3x^{(1)}=b_5+b_6t \tag{13}$$

以最小二乘法求解式（13）的待求参数估值为：

$$\left[a_2\ a_3\ b_5\ b_6\right]=\left(\boldsymbol{B}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_4\right)^{-1}\boldsymbol{B}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2 \tag{14}$$

式中，$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & -Z^{(1)}(2) & 1 & 2\\ -x^{(0)}(2) & -Z^{(1)}(2) & 1 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -x^{(0)}(2) & -Z^{(1)}(2) & 1 & n\end{bmatrix}$。

采用式（6）还原数列，得到原始观测序列的预测值。

1.3　基于时变参数的灰色模型检验

基于时变参数的灰色模型以灰色模型为基础，因此应进行灰色模型检验，验证建立模型是否符合实际情况。检验指标以相对误差、后验方差比和小误差概率为主，判断灰色模型预测精度等级（表1）。

2　实例分析

2.1　数据来源

本文以矿区采空区某走向观测线中93号、101号

表1 灰色模型精度检验

等级	相对误差	后验方差比	小误差概率
Ⅰ级	<0.01	<0.35	>0.95
Ⅱ级	<0.05	<0.50	<0.80
Ⅲ级	<0.10	<0.65	<0.70
Ⅳ级	>0.20	>0.80	<0.60

沉降监测点为例，分别观测14期，采用电子水准仪按照国家三、四等水准测量规范要求对沉降监测点的垂直位移进行观测（表2、3）。为比较不同灰色模型的预测结果，本文设计了4种灰色模型的算方案：①传统灰色GM(1,1)模型；②传统灰色GM(2,1)模型；③基于时变参数的GM(1,1)模型；④基于时变参数的GM(2,1)模型；将前10期作为拟合观测序列，后4期作为观测序列。

表2 93号监测点累计沉降值

期次	累计沉降值/mm	期次	累计沉降值/mm	期次	累计沉降值/mm
1	20	6	656	11	1 057
2	72	7	815	12	1 077
3	140	8	988	13	1 084
4	202	9	1 016	14	1 090
5	548	10	1 032		

表3 101号监测点累计沉降值

期次	累计沉降值/mm	期次	累计沉降值/mm	期次	累计沉降值/mm
1	25	6	371	11	868
2	65	7	508	12	889
3	101	8	791	13	898
4	138	9	821	14	905
5	304	10	841		

2.2 预测结果分析

2.2.1 传统灰色模型预测结果

根据传统灰色GM(1,1)和GM(2,1)模型建立的过程，编制灰色GM(1,1)和GM(2,1)模型的计算机语言程序，输入沉降监测点原始数据并建立灰色模型，得到预测结果以及预测值与实测值的残差值，见表4、5。

2.2.2 基于时变参数的灰色模型预测结果

由于灰色作用量具有时变性质，本文建立基于时变参数的灰色GM(1,1)和GM(2,1)模型。根据时变参数灰色模型的建立过程，以沉降监测点为原始数据建立模型并计算，得到预测结果以及预测值与实测值的残差值（表6、7）。

表4 93号监测点传统灰色模型预测结果/mm

观测期数	实测值	传统GM(1,1)模型		传统GM(2,1)模型	
		预测值	残差值	预测值	残差值
1	20	21	1	23	3
2	72	73	1	67	−5
3	140	174	34	158	18
4	202	233	31	242	40
5	548	505	−43	542	−6
6	656	631	−25	669	13
7	815	786	−29	780	−35
8	988	888	−100	955	−33
9	1 016	992	−24	983	−33
10	1 032	1 071	39	1 016	−16
11	1 057	1 120	63	1 063	6
12	1 077	1 132	55	1 095	18
13	1 084	1 103	19	1 103	19
14	1 090	1 127	37	1 109	19

表5 101号监测点传统灰色模型预测结果/mm

观测期数	实测值	传统GM(1,1)模型		传统GM(2,1)模型	
		预测值	残差值	预测值	残差值
1	25	20	5	28	−3
2	65	79	−14	23	42
3	101	93	8	68	33
4	138	145	−7	166	−28
5	304	256	48	294	10
6	371	409	−38	434	−63
7	508	574	−66	569	−61
8	791	718	73	723	68
9	821	822	−1	784	37
10	841	883	−42	851	−10
11	868	914	−46	891	−23
12	889	938	−49	905	−16
13	898	981	−83	902	−4
14	905	950	−45	891	14

2.2.3 不同模型预测结果对比分析

1）对于93号监测点，方案①、②的残差绝对值最大值分别为100 mm、40 mm，均方根误差分别为11.53 mm、5.92 mm；对于101号监测点，方案①、②的残差绝对值最大值分别为73 mm、68 mm，均方根误差分别为12.12 mm、10.09 mm。在传统灰色模型

表6　93号监测点时变参数灰色模型预测结果/mm

观测期数	实测值	时变参数GM(1,1)模型		时变参数GM(2,1)模型	
		预测值	残差值	预测值	残差值
1	20	25	5	29	9
2	72	62	−10	78	6
3	140	133	−7	131	−9
4	202	234	32	217	15
5	548	561	13	557	9
6	656	664	8	671	15
7	815	824	9	828	13
8	988	976	−12	978	−10
9	1 016	1 026	10	1 025	9
10	1 032	1 044	12	1 053	21
11	1 057	1 071	14	1 072	15
12	1 077	1 062	−15	1 065	−12
13	1 084	1 063	−21	1 075	−9
14	1 090	1 104	14	1 094	4

表7　101号监测点时变参数灰色模型预测结果/mm

观测期数	实测值	时变参数GM(1,1)模型		时变参数GM(2,1)模型	
		预测值	残差值	预测值	残差值
1	25	19	6	30	−5
2	65	43	22	57	8
3	101	103	−2	92	9
4	138	190	−52	161	−23
5	304	298	6	268	36
6	371	417	−46	406	−35
7	508	580	−72	537	−29
8	791	756	35	758	33
9	821	767	54	808	13
10	841	855	−14	874	−33
11	868	916	−48	891	−23
12	889	941	−52	873	16
13	898	923	−25	855	43
14	905	854	51	900	5

中，方案②建立的灰色GM(2,1)模型求取的预测值均方根误差最小，预测精度最高。

2）对于93号监测点，方案③、④的残差绝对值最大值分别为32 mm、21 mm，均方根误差分别为3.89 mm、3.18 mm；对于101号监测点，方案③、④的残差绝对值最大值分别为72 mm、43 mm，均方根误差分别为10.86 mm、9.64 mm。在基于时变参数的灰色模型中，方案④建立的时变参数GM(2,1)模型求取的预测值均方根误差最小，模型预测精度最高。

3）根据表1对基于时变参数的GM(2,1)模型进行精度评价，两个沉降监测点的精度检验等级均为Ⅱ级。

3　结　语

为提高灰色模型拟合与预测精度，本文将灰色作用量表示为随时间的变化的线性函数，建立了以时变参数优化灰色作用量的改进灰色模型；并通过建立不同灰色模型，对比分析了预测效果。结果表明，基于时变参数的GM(2,1)模型具有更好的预测效果，弥补了灰色作用量固定不变导致的预测精度差的问题。不足之处在于，在微分方程相关矩阵计算中，背景值基于前后紧邻值等权的原则，未对背景值进行优化，有待于进一步研究。

参考文献

[1] 梁珂,李文阳,王宏宇,等. 建筑沉降监测与组合预测模型研究[J]. 地理空间信息,2022,20(7):26-31

[2] 王坤. 基于灰色—小波神经网络模型的建筑物变形预测[J]. 测绘技术装备,2022,24(1):28-32

[3] 杨恒,岳建平,丛康林,等. 基于GM(1,1)模型的高速铁路沉降分析预测[J]. 地理空间信息,2020,18(10):95-98

[4] 范飞玲,黄基峻. 基于小波去噪的优化灰色模型在变形监测中的应用[J]. 测绘标准化,2022,38(2):85-90

[5] 贾晶磊,陈月顺,朱念焜. 基于灰色DNGM(1,1)的隧道拱顶沉降预测研究[J]. 测绘与空间地理信息,2022,45(7):229-231

[6] 闫小辉,徐泮林. 基于GM(1,1)与Verhulst模型的建筑物沉降预测分析[J]. 地理空间信息,2020,18(9):110-112

[7] 成枢,周龙飞,王姝力,等. 基于上凸序列的修正GM(1,1)模型应用[J]. 地理空间信息,2020,18(7):82-84

[8] 曾亮,骆世广. 分数阶累加的离散GM(2,1)模型与应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2021,38(5):73-80

[9] 代祥勇,吕树春. 等维新息灰色一、二阶模型在地铁隧道下穿施工监测中的应用[J]. 测绘技术装备,2021,23(3):32-35

[10] 张振超,张军,袁德宝,等. 优化背景值的时变参数GM(1,1)在铁路沉降中的应用[J]. 测绘科学,2020,45(3):39-45

[11] 王炳,李培现,张军,等. 优化背景值的非等间距线性时变参数GM(1,1)幂模型在变形监测中的应用[J]. 大地测量与地球动力学,2022,42(8):823-828

[12] 刘文生,权文斌. 基于改进等维信息灰色模型的高铁隧道沉降预测研究[J]. 测绘与空间地理信息,2018,41(6):210-213