引文格式:余航,王坚,王乐洋,等.接受域类型差异对多重备选假设数据探测法的影响分析[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(10):1978-1990.DOI:10.13203/j.whugis20240136

Citation: YU Hang, WANG Jian, WANG Leyang, et al. Impact of Different Types of Acceptance Regions on Data Snooping with Multiple Alternative Hypotheses[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, 50(10): 1978-1990. DOI: 10.13203/j.whugis20240136

接受域类型差异对多重备选假设数据探测法的影响分析

余 航[1] 王 坚[2] 王乐洋[3] 宁一鹏[4] 赵 伟[1]

1 苏州科技大学地理科学与测绘工程学院,江苏 苏州,215009
2 北京建筑大学测绘与城市空间信息学院,北京,100044
3 东华理工大学测绘与空间信息工程学院,江西 南昌,330013
4 山东建筑大学测绘地理信息学院,山东 济南,250101

摘 要:当先验单位权方差因子已知时,超椭球体或超多面体接受域常被用于多重备选假设数据探测法,以探测与识别观测值中的粗差,但不同接受域类型对该方法的影响缺乏分析。首先,分别基于残差和闭合差构建的Baarda w-检验统计量,综合分析接受域类型的差异对检验空间、检验决策概率计算、最小可探测偏差(minimal detectable bias,MDB)及正确识别率的影响,总结了目前3种计算检验决策概率的方法;然后,以二维闭合差的检验空间为基础,揭示了不同接受域类型导致的正确识别率差异与函数模型几何间的对应关系。数值实验结果表明,不同接受域类型不仅会导致MDB的不同,还会影响检验决策概率的大小,导致正确识别率存在差异。分析该差异与模型几何间的关系有助于改善网形设计,降低接受域类型的差异对备选模型正确识别率的影响。

关键词:数据探测法;多重假设检验;检验空间;正确识别;最小可探测偏差

中图分类号:P207 **文献标识码**:A **收稿日期**:2024-09-24

DOI:10.13203/j.whugis20240136 **文章编号**:1671-8860(2025)10-1978-13

Impact of Different Types of Acceptance Regions on Data Snooping with Multiple Alternative Hypotheses

YU Hang[1] *WANG Jian*[2] *WANG Leyang*[3] *NING Yipeng*[4] *ZHAO Wei*[1]

1 School of Geography Science and Geomatics Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China
2 School of Geomatics and Urban Spatial Informatics, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China
3 School of Surveying and Geoinformation Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China
4 College of Surveying and Geo-Informatics, Shandong Jianzhu University, Ji'nan 250101, China

Abstract: **Objectives**: When a priori variance factor is known, hyperellipsoidal or hyperpolyhedral acceptance regions are frequently utilized for data snooping with multiple alternative hypotheses to pinpoint potential outliers in the observations. Despite their prevalence, there is a dearth of research examining how these regions affect the efficacy of data snooping. **Methods**: Residual- and misclosure-based Baarda w-test statistics are used to provide a comprehensive analysis of the impact of different acceptance regions on the testing space, decision probabilities, the minimal detectable bias (MDB), and the probability of correctly identifying an alternative hypothesis. How the geometry of the functional model impacts the correct identification probabilities is also used in a two-dimensional misclosure-based testing space. **Results**: The results show that different types of acceptance regions have a certain impact on the size of the MDB and the testing decision probabilities, but it is not significant. However, under certain geometric conditions, the variation in correct identification probabilities is significant, with a theoretical difference of nearly 3% in single-point

基金项目:国家自然科学基金(42574064,42204011,42274029,42174011);江苏省科技计划项目(BK20230660)。

第一作者:余航,博士,讲师,研究方向为多源传感器融合及其质量控制。yhecit@163.com

positioning scenarios. From the geometric perspective of partitioning of the misclosure space, the difference in acceptance regions will change the subspaces of the critical regions, thereby affecting the results of outlier detection and identification. **Conclusions**: Analyzing the relationship between different types of acceptance regions and model geometry can help improve the model geometry and reduce its impact on the probability of correct identification. The findings are informative for the selection of hyperellipsoid and hyperpolyhedral acceptance regions, when employing data snooping with multiple alternative hypotheses in scenarios where the a priori variance factor is known.

Key words: data snooping; multiple alternative hypotheses; testing space; correct identification; minimum detectable bias

原假设和单一备选假设下,Baarda w-检验统计量是一致最大功效不变检验统计量[1-2]。通过预设的显著性水平(第Ⅰ类错误)与错误探测率(第Ⅱ类错误),并根据Baarda w-检验统计量满足一维正态分布的特点,可确定粗差探测的接受域及最小可探测偏差(minimal detectable bias, MDB)。因仅存在单一备选假设,该接受域为实轴上的一段区间。但在实际应用中,由于事先无法知晓观测值粗差的具体位置,常建立多重备选假设,并结合数据探测法一次假定一个观测值存在粗差[3-4]。多重备选假设数据探测法还需考虑错误识别率(第Ⅲ类错误),其Baarda w-检验统计量实则服从高维正态分布。而在多重备选假设下,目前并无最优的检验统计量[2,4],通常依据探测、识别与调节改正框架,先构建粗差探测的接受域,探测粗差的存在,进而识别和定位粗差,并对含粗差观测值进行处理以估计模型参数(调节改正)。但在先验单位权方差因子已知的条件下,多重备选假设数据探测法既可依据原假设下残差加权平方和满足中心化卡方分布的特点构建超椭球体接受域[2,4-14],也可根据各备选假设对应的Baarda w-检验统计量构建超多面体接受域[3,14-23],两种方式均有广泛应用。不同接受域的选择必然会对粗差探测与识别的结果产生影响,体现在两个方面:(1)不同类型接受域影响检验统计量所属的检验空间。Baarda w-检验统计量既可由残差进行构建[2,4,10],也可通过闭合差构建[3,18-19]。但无论采用何种形式的检验统计量,其本质是找到统计量所属检验空间的子空间。因此,与接受域相邻的各邻域子空间必受到接受域类型差异所带来的影响,进而影响粗差探测与识别的结果。(2)不同类型接受域影响检验决策概率的大小。检验决策概率的计算实则是检验统计量的概率密度函数在检验子空间上的积分运算[2-3],不同接受域对应的子空间不同,积分区域的大小也就不同,导致检验决策概率结果不同。检验决策概率中正确探测率与正确识别率往往又是确定最小可探测偏差与最小可识别偏差的基础。虽然利用超椭球和超多面体接受域进行观测值粗差探测与识别的应用广泛,但是接受域类型差异对多重备选假设数据探测法的影响缺乏分析。

因此,本文基于残差型和闭合差型Baarda w-检验统计量,首先总结超椭球和超多面体接受域下3种检验决策概率的计算方法,给出基于残差型 w-统计量检验空间划分的统一表达式;然后,以二维闭合差的检验空间为基础,揭示不同接受域类型导致的正确识别率差异与函数模型几何间的对应关系;最后,以直接平差、平面测边网及单点定位模型为例,给出闭合差 w-统计量检验空间划分结果,并结合数值模拟方法分析两类接受域的差异对MDB及正确识别率差异的影响。

1　Baarda w-检验统计量的构建

1.1　残差型Baarda w-检验统计量[3]

设原假设模型为:

$$H_0: E(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, D(\boldsymbol{y})=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_y=\boldsymbol{\Sigma}_y \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m$ 为满足正态分布的观测向量;$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 为列满秩系数矩阵;$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为模型参数向量;$E(\,)$、$D(\,)$分别为期望和方差运算符;σ_0^2 表示已知的先验单位权方差因子;$\boldsymbol{Q}_y$ 为 $\boldsymbol{y}$ 协因数阵;$\boldsymbol{\Sigma}_y$ 表示观测向量 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵。

设平差模型中只存在单个粗差,数据探测法将粗差归入函数模型,认为粗差与正常观测值的方差相同而期望不同,进而利用统计检验探测并剔除粗差[23]。因此,可构建如下 m 个备选假设模型:

$$H_i: E(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\nabla_i, D(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\Sigma}_y, i=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{c}_i$ 表示第 i 个元素为1、其余为0的单位向量;∇_i 表示粗差。因此,$\boldsymbol{c}_i\nabla_i$ 对应第 i 个观测值的

粗差。在大地测量领域,形如式(2)的模型称为均值漂移模型[24]。

残差型Baarda w-检验统计量w_i可构造为:

$$w_i=\frac{\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\hat{\boldsymbol{e}}_0}{\sqrt{\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{c}_i}} \tag{3}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{e}}_0=\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{y}$为$H_0$下的残差;$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}=\boldsymbol{\Sigma}_y-\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为$\hat{\boldsymbol{e}}_0$的协方差阵。

当第i个观测值含粗差时,$w_i\sim N(\delta_i,1)$,$\delta_i=\nabla_i/\hat{\sigma}_{\nabla_i}$为非中心化参数,$\hat{\sigma}_{\nabla_i}^2$为粗差的方差估值,$\hat{\sigma}_{\nabla_i}^2=(\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{c}_i)^{-1}$;否则$w_{j\neq i}\sim N(0,1)$。

各统计量间的相关系数ρ_{ij}可根据协方差传播律确定为:

$$\rho_{ij}=\frac{\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{c}_j}{\sqrt{\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{c}_i}\sqrt{\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{c}_j}} \tag{4}$$

数据探测法常建立如下两类接受域以探测粗差:(1)以$\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|_{\boldsymbol{\Sigma}_y}^2\leqslant k_\alpha$为准则建立的超椭球体接受域,当先验单位权方差因子已知时,若观测值无粗差,$\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|_{\boldsymbol{\Sigma}_y}^2$服从自由度为$r=m-n$、非中心参数为0的卡方分布,$k_\alpha=\chi_\alpha^2(r,0)$,其中$\|\|_*^2=()^{\mathrm{T}}*^{-1}()$,$\alpha$为整体显著性水平[13];(2)以$|w_i|\leqslant c_{\alpha_1}$($i=1,2,\cdots,m$)为准则建立的超多面体接受域,其中$\alpha_1\approx\alpha/m$[13],临界值$c_{\alpha_1}$可通过文献[16]中的采样方法计算得到。若检验结果归属接受域,则原假设模型H_0成立;否则,以$|w_i|$中最大值对应的备选模型H_i作为粗差识别结果(不考虑检验未定的情况)。

若建立超椭球体接受域,原假设和备选假设模型与粗差探测和识别结果的关系对应于:

$$\begin{cases}H_0:\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|_{\boldsymbol{\Sigma}_y}^2\leqslant k_\alpha\\ H_i:|w_i|=\max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}|w_j|,\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|_{\boldsymbol{\Sigma}_y}^2>k_\alpha\end{cases} \tag{5}$$

若建立超多面体接受域,则上述关系对应于:

$$\begin{cases}H_0:|w_i|\leqslant c_{\alpha_1},i=1,2,\cdots,m\\ H_i:|w_i|=\max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}|w_j|>c_{\alpha_1}\end{cases} \tag{6}$$

可见,由于变量$\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|_{\boldsymbol{\Sigma}_y}^2$和$|w_i|$构建的不同,探测的接受域也不相同。

1.2 闭合差型Baarda w-检验统计量[2]

令矩阵$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$零空间的一组基,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{m\times r}$,且有$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}_{r\times n}$。在$H_0$假设下,将式(1)中函数模型写成误差方程形式,即$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_0+\hat{\boldsymbol{e}}_0$,再将$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$左乘该误差方程,可得如下条件方程:

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}_0 \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^r$即为闭合差向量,其协方差阵$\boldsymbol{\Sigma}_t=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y\boldsymbol{B}$;在$H_0$下$\boldsymbol{t}\sim N(\boldsymbol{0}_{r\times1},\boldsymbol{\Sigma}_t)$,而在$H_i$下,$\boldsymbol{t}\sim N(\boldsymbol{\mu}_{t_i},\boldsymbol{\Sigma}_t)$,其中$\boldsymbol{\mu}_{t_i}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_i\nabla_i$。矩阵$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$可由$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}^{\perp}$确定[10],$\boldsymbol{S}\in\mathbf{R}^{m\times r}$为正交矩阵,可通过对$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}$奇异值分解并选择其酉矩阵前$r$列得到,$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}^{\perp}=\boldsymbol{I}_{m\times m}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}_y\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$[25-26]。

进一步将$\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1/2}$左乘式(7),并令$\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1/2}\boldsymbol{t}$表示变换后的闭合差向量。考虑$\hat{\boldsymbol{e}}_0=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}^{\perp}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Sigma}_y\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\boldsymbol{t}$,$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}=\boldsymbol{\Sigma}_y\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y$,则由闭合差型构建的检验量可表示为:

$$\begin{cases}\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|_{\boldsymbol{\Sigma}_y}^2=\|\bar{\boldsymbol{t}}\|^2\\ |w_i|=\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\|\end{cases} \tag{8}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i}=\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1/2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_i$;$\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}=\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i}(\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i})^{-1}\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i}^{\mathrm{T}}$表示到向量$\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i}$的正交投影矩阵。

将$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{e}_0}=\boldsymbol{\Sigma}_y\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y$代入式(4),统计量间相关系数$\rho_{ij}$可等价地表示为$\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i}$与$\bar{\boldsymbol{c}}_{t_j}$夹角的余弦:

$$\rho_{ij}=\cos\angle(\bar{\boldsymbol{c}}_{t_i},\bar{\boldsymbol{c}}_{t_j}) \tag{9}$$

因此,残差型w-检验统计量可等价地由变换后的闭合向量$\bar{\boldsymbol{t}}$构建。根据粗差探测接受域的不同,原假设和备选假设模型与粗差探测、识别结果的关系等价于:

$$\begin{cases}H_0:\|\bar{\boldsymbol{t}}\|^2\leqslant k_\alpha\\ H_i:\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\|=\max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_j}}\bar{\boldsymbol{t}}\|,\|\bar{\boldsymbol{t}}\|^2>k_\alpha\end{cases} \tag{10}$$

或

$$\begin{cases}H_0:\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\|\leqslant c_{\alpha_1},i=1,2,\cdots,m\\ H_i:\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\|=\max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_j}}\bar{\boldsymbol{t}}\|>c_{\alpha_1}\end{cases} \tag{11}$$

相较于式(5)、式(6),以闭合差构建的粗差探测与识别过程可等价地由式(10)或式(11)实现。

2 接受域类型差异对检验空间划分的影响

2.1 残差型Baarda w-统计量的检验空间划分

式(5)、式(6)的粗差探测与识别准则实则表征了统计量$\boldsymbol{w}$在其所属$\mathbf{R}^m$空间的一种几何划分。为说明这一点,将式(3)中各w_i($i=1,2,\cdots,m$)组成向量形式:

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\hat{\boldsymbol{e}}_0 \tag{12}$$

式中,令$\boldsymbol{w}=[w_1\ w_2\cdots w_m]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}=\mathrm{diag}(\hat{\sigma}_{\nabla_1},\hat{\sigma}_{\nabla_2},\cdots,\hat{\sigma}_{\nabla_m})$,进而有:

$$\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|^2_{\boldsymbol{\Sigma}_y}=\|\boldsymbol{w}\|^2_{\boldsymbol{Q}} \tag{13}$$

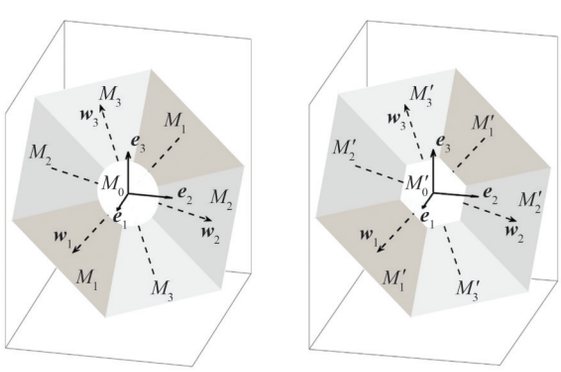
式中,记 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$。可见,残差表示的超椭球体接受域 $\|\hat{\boldsymbol{e}}_0\|^2_{\boldsymbol{\Sigma}_y}\leqslant k_\alpha$ 可由 $\boldsymbol{w}$ 等价地表示为 $\|\boldsymbol{w}\|^2_{\boldsymbol{Q}}\leqslant k_\alpha$。

根据式(5),残差型 w-统计量的检验空间可统一划分为如下 $m+1$ 个子空间:

$$\begin{cases} M_0=\{\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^m\,\big|\,\|\boldsymbol{w}\|^2_{\boldsymbol{Q}}\leqslant k_\alpha\} \\ M_i=\{\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^m\backslash M_0\,\big|\,|w_i|= \\ \qquad \max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}|w_j|\},i=1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{14}$$

因此,粗差探测与识别过程亦可描述为:当 $\boldsymbol{w}\in M_0$ 时,接受 H_0;而当 $\boldsymbol{w}\in M_i(\forall i\neq 0)$ 时,接受 H_i;各子空间满足 $M_0\cap M_i=\varnothing$、$\cup_{i=0}^m M_i=\mathbf{R}^m$。若构建超多面体接受域,则 $M_0=\{\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^m\,\big|\,|w_i|\leqslant c_{\alpha_1},\forall i\}$,$M_i'=\{\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^m\backslash M_0'\,\big|\,|w_i|=\max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}|w_j|\}$,且有 $M_0'\cap M_i'=\varnothing$,$\cup_{i=0}^m M_i'=\mathbf{R}^m$。实际上,粗差识别的过程也即在接受域 $\boldsymbol{w}\notin M_0$($\boldsymbol{w}\notin M_0'$)外,在拒绝域 $\mathbf{R}^m\backslash M_0$($\mathbf{R}^m\backslash M_0'$)中寻求统计量 $\boldsymbol{w}$ 所属的子空间。

统计量 $\boldsymbol{w}$ 可表达为 $\boldsymbol{y}$ 的真误差 $\boldsymbol{e}_0$ 的函数。由式(12)并顾及残差 $\hat{\boldsymbol{e}}_0$ 与 $\boldsymbol{e}_0$ 的关系 $\hat{\boldsymbol{e}}_0=\boldsymbol{P}_A^\perp\boldsymbol{e}_0$[16],可得 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_0$,其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{P}_A^\perp$。均值漂移模型认为随机模型能够准确反映观测量的统计性质,观测量的方差即为真误差的方差 $\boldsymbol{\Sigma}_y=\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{e}_0}$。考虑到矩阵 $\boldsymbol{R}$ 秩亏($\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{m\times m})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{P}_A^\perp)=r<m$),因此,残差型 w-统计量的检验空间实则是对 $\boldsymbol{e}_0$ 张成的 $\mathbf{R}^m$ 空间进行投影,得到 m 维空间下的一个 r 维子空间。以直接平差为例,令系数矩阵 $\boldsymbol{A}=[1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$、参数 $x=1$、$\boldsymbol{\Sigma}_y=0.1\times\boldsymbol{I}_{3\times 3}$,其残差型 w-统计量的检验空间划分如图1所示。



(a) 圆形接受域　　(b) 六边形接受域

图1　直接平差中残差型 w-统计量的空间划分

Fig. 1　Partitioning of Testing Space of w in Canonical Model

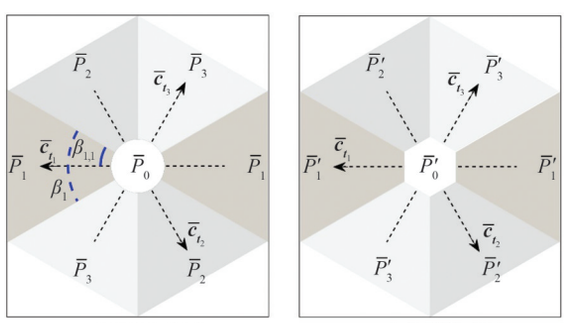
由于 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 为对角阵且各分量精度相同,$\boldsymbol{w}$ 的检验空间实则是以 $\boldsymbol{e}_0$ 的正交基[$\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3$]张成的三维空间中的一个二维平面子空间。此时,超椭球和超多面体接受域分别"退化"为圆形和正六边形。

2.2　闭合差型 Baarda w-统计量的检验空间划分

根据式(10),基于变换后闭合差 $\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^r$ 划分的各子空间 $\bar{P}_0$ 和 $\bar{P}_i$ 可表示为:

$$\begin{cases} \bar{P}_0=\{\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^r\,\big|\,\|\bar{\boldsymbol{t}}\|^2\leqslant k_\alpha\} \\ \bar{P}_i=\{\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^r\backslash\bar{P}_0\,\big|\,\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\|= \\ \qquad \max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_j}}\bar{\boldsymbol{t}}\|\},i=1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{15}$$

若以超多面体构建接受域,则 $\bar{P}_0'=\{\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^r\,\big|\,\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\|\leqslant c_{\alpha_1},\forall i\}$,$\bar{P}_i'=\{\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^r\backslash\bar{P}_0'\,\big|\,\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\|=\max\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m\}}\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_j}}\bar{\boldsymbol{t}}\|\}$。图2给出了前述直接平差问题中闭合差向量 $\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^2$ 的检验空间划分。



(a) 圆形接受域　　(b) 六边形接受域

图2　直接平差中闭合差向量 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 的空间划分

Fig. 2　Partitioning of Misclosure Space of $\bar{\boldsymbol{t}}$ in Canonical Model

3　接受域类型差异对检验决策概率的影响

3.1　残差型 Baarda w-统计量的检验决策概率[3]

计算残差型 w-统计量的检验决策概率,实质是计算满足高维正态分布统计量 w 的概率密度函数在式(5)或式(6)所示子空间上的积分。因此,检验决策概率,如正确接受率(correct acceptance,CA)P_{CA}、虚警率(false alarm,FA)P_{FA}、正确探测率(correct detection,CD)P_{CD_i}、错误探测率(missed detection,MD)P_{MD_i}、正确识别率(correct identification,CI)P_{CI_i} 与错误识别率(wrong identification,WI)P_{WI_i} 表示为:

$$\begin{cases} P_{\mathrm{CA}}=P\left(\boldsymbol{w}\in M_0\middle|H_0\right)=\int\limits_{M_0}f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{FA}}=P\left(\boldsymbol{w}\notin M_0\middle|H_0\right)=\int\limits_{\mathbf{R}^m\setminus M_0}f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{CD}_i}=P\left(\boldsymbol{w}\notin M_0\middle|H_i\right)=\int\limits_{\mathbf{R}^m\setminus M_0}f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{MD}_i}=P\left(\boldsymbol{w}\in M_0\middle|H_i\right)=\int\limits_{M_0}f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{CI}_i}=P\left(\boldsymbol{w}\in M_i\middle|H_i\right)=\int\limits_{M_i}f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{WI}_i}=P\left(\boldsymbol{w}\in\cup_{j\neq0,i}^{m}M_j\middle|H_i\right)=\int\limits_{\cup_{j=1,\neq i}^{m}M_j}f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \end{cases} \tag{16}$$

式中,$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)$、$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)$分别是均值为$\mathbf{0}_{m\times1}$和$\boldsymbol{\mu}_i=\delta_i[\,\rho_{1i}\rho_{2i}\cdots\rho_{mi}\,]^{\mathrm{T}}$、协方差阵同为$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$的正态分布概率密度函数。根据式(3)、式(4),$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$的对角线元素为1,非对角线元素由$\rho_{ij}$构成;$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$也可根据$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$直接确定。若以超多面体构建接受域,计算检验决策概率也即为概率密度函数$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)$和$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)$在相应子空间$M_0'$和$M_i'$上的积分。

3.2 闭合差型Baarda w-统计量的检验决策概率

闭合差型统计量的决策概率为$\bar{\boldsymbol{t}}$的高维正态分布概率密度函数在式(15)所示子空间上的积分如下:

$$\begin{cases} P_{\mathrm{CA}}=P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_0\middle|H_0\right)=\int\limits_{\bar{P}_0}\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{FA}}=P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\notin\bar{P}_0\middle|H_0\right)=\int\limits_{\mathbf{R}^r\setminus\bar{P}_0}\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{CD}_i}=P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\notin\bar{P}_0\middle|H_i\right)=\int\limits_{\mathbf{R}^r\setminus\bar{P}_0}\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{MD}_i}=P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_0\middle|H_i\right)=\int\limits_{\bar{P}_0}\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{CI}_i}=P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i\middle|H_i\right)=\int\limits_{\bar{P}_i}\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \\ P_{\mathrm{WI}_i}=P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\cup_{j\neq0,i}^{m}\bar{P}_j\middle|H_i\right)=\int\limits_{\cup_{j=1,\neq i}^{m}\bar{P}_j}\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \end{cases} \tag{17}$$

式中,$\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)$和$\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)$分别是均值为$\mathbf{0}_{r\times1}$和$\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}=\bar{c}_{t_i}\nabla_i$、协方差阵均为$r$维单位阵的正态分布概率密度函数。类似地,若以超多面体构建接受域,计算检验决策概率也即为概率密度函数$\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)$和$\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)$在对应子空间$\bar{P}_0'$和$\bar{P}_i'$上的积分。

3.3 接受域类型差异对检验决策概率计算的影响

式(16)、式(17)中高维正态分布的积分问题可通过蒙特卡洛方法实现。但概率密度函数$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)$、$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)$中协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$秩亏,而$\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)$和$\bar{f}_{\bar{\boldsymbol{t}}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)$中$\bar{\boldsymbol{t}}$的协方差矩阵为单位阵,因此,采用蒙特卡洛数值模拟方法计算式(16)、式(17)的方法不同。可归纳为如下3种:

1)方法一,在观测值域进行蒙特卡洛采样[3]。设定整体显著性水平和检验功效,确定备选假设H_i的最小可探测偏差$\nabla_{i,\mathrm{MDB}}$,根据标准正态分布$N(\mathbf{0}_{m\times1},\boldsymbol{I}_{m\times m})$随机生成$m\times1$维向量$\boldsymbol{s}$,对$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}}$进行Cholesky分解$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$,得到观测向量采样值$\bar{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{e}}_0+\boldsymbol{c}_i\nabla_{i,\mathrm{MDB}}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{s}$,进而对$\bar{\boldsymbol{y}}$进行粗差探测与识别。重复上述步骤$N$次,根据式(5)或式(6)统计各类检验结果发生的次数,计算检验决策概率。

2)方法二,直接获取检验统计量$\boldsymbol{w}$的采样值[14,20]。由于矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$秩亏,可采用广义Cholesky分解技术,实现对秩亏矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$的分解[20];进而根据不同概率密度函数$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_0\right)$、$f_{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{\tau}\middle|H_i\right)$的分布特点,分别对高维正态分布$N(\mathbf{0}_{m\times1},\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}})$或$N\left(\boldsymbol{\mu}_i,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}\right)$进行$N$次采样,再计算检验决策概率。

3)方法三,直接获取转换后闭合差向量$\bar{\boldsymbol{t}}$的采样值[2,4]。由于向量$\bar{\boldsymbol{t}}$的协方差矩阵为单位阵,即$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\boldsymbol{t}}}=\boldsymbol{I}_{r\times r}$,直接对高维正态分布$N(\mathbf{0}_{r\times1},\boldsymbol{I}_{r\times r})$和$N\left(\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}},\boldsymbol{I}_{r\times r}\right)$进行$N$次蒙特卡洛采样,根据式(10)或式(11)统计各类检验结果发生的次数,计算检验决策概率。

对比上述3种方法可知,采用方法一避免了对秩亏矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$进行广义Cholesky分解,但需要一组无观测粗差且经过最小二乘平差改正后的观测向量$\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{e}}_0$作为基准观测向量,该方法适用于理论验证分析;采用方法二则需引入针对秩亏矩阵分解的广义Cholesky分解技术;采用方法三需要对统计量进行转换,得到基于闭合差的表达式,但无需任何矩阵分解技术。

4 接受域类型差异对最小可探测偏差的影响

根据接受域的不同,MDB的计算结果也将不同。若以$\bar{\boldsymbol{t}}$构建超椭球体接受域,在H_i下,其错误探测率为$P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\notin\bar{P}_0\middle|H_i\right)=P\left(\left\|\bar{\boldsymbol{t}}\right\|^2>k_a\middle|H_i\right)$。由于$\left\|\bar{\boldsymbol{t}}\right\|^2$服从自由度为$r$的非中心化卡方分布

$\chi_\alpha^2(r,\lambda_i^2)$,其中 $\lambda_i^2=\left\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\right\|^2$,因此,在单个粗差假设下,以超椭球体接受域得到的MDB为:

$$\left|\nabla_{i,\mathrm{MDB}}\right|=\lambda_i(k_\alpha,\gamma,r)\Big/\left\|\bar{c}_{t_i}\right\| \tag{18}$$

式中,γ 为错误探测率阈值;$\lambda_i(k_\alpha,\gamma,r)$ 表示 λ_i 由 k_α、γ、r 确定。

若建立超多面体接受域,H_i 下的错误探测率为 $P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\notin\bar{P}_0'\middle|H_i\right)=P\left(\left\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\right\|>c_{\alpha_1},\forall i\middle|H_i\right)$。由式(8)可知 $\left\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\right\|=|w_i|$,且由于 w_i 服从非中心化参数为 δ_i 的正态分布 $N(\delta_i,1)$。因此,在单个粗差假设下,以超多面体接受域得到的MDB为:

$$\left|\nabla_{i,\mathrm{MDB}}\right|=\delta_i(c_{\alpha_1},\gamma,r)\Big/\left\|\bar{c}_{t_i}\right\| \tag{19}$$

式中,$\delta_i(c_{\alpha_1},\gamma,r)$ 表示非中心化参数 δ_i 由 c_{α_1}、γ、r 确定。

由于 λ_i、δ_i 不仅与 α 和检验功效 $1-\gamma$ 相关,还与其对应临界值 k_α、c_{α_1} 有关;不同接受域确定的临界值不同,得到的MDB结果亦存在差异。需要注意的是,实际计算中,若采用基于闭合差 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 确定MDB,通常直接采用蒙特卡洛方法,通过 $P(\|\bar{\boldsymbol{t}}\|^2>k_\alpha|H_i)=1-\gamma$ 和 $P(\left\|\boldsymbol{P}_{\bar{c}_{t_i}}\bar{\boldsymbol{t}}\right\|>c_{\alpha_1},\forall i|H_i)=1-\gamma$ 直接反算得到超椭球和超多面体接受域下的最小可探测偏差。

5　接受域类型差异对正确识别率的影响

备选模型 H_i 的正确识别率 P_{CI_i} 是多重备选假设数据探测法中粗差识别的重要指标,也是确定最小可识别偏差的基础。定义超椭球和超多面体接受域得到的正确识别率差异为两者差值 δP_{CI_i} 的绝对值 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_i}\right|$。$\delta P_{\mathrm{CI}_i}$ 是两个 r 维正态分布之差:

$$\delta P_{\mathrm{CI}_i}=P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i\middle|H_i\right)-P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i'\middle|H_i\right) \tag{20}$$

根据式(17),其大小不仅取决于被积区域 $\bar{P}_i$ 与 $\bar{P}_i'$ 的差异,还取决于 $\bar{f}_{\bar{t}}(\boldsymbol{\tau}|H_i)$ 在差异区域上的分布情况。顾及 $\bar{f}_{\bar{t}}(\boldsymbol{\tau}|H_i)$ 中的 $\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}=\bar{c}_{t_i}\nabla_i$,上述差异实则与平差模型(反映在向量 $\bar{c}_{t_i}$ 相对于积分区域的空间位置关系)密切相关。

以 $r=2$ 条件下的二维平面空间展开说明,此时,δP_{CI_i} 实则是 $\mathbf{R}^2$ 空间上的积分之差。如图2所示,令 β_i 表示积分区域 $\bar{P}_i(\bar{P}_i')$ 边界的夹角,$\beta_{i,1}$ 表示 $\bar{c}_{t_i}$ 与其所属积分区域右边界的夹角。文献[4]已证明,当 $\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$ 时,基于超椭球体接受域得到的正确识别率 $P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i\middle|H_i\right)$ 取到最大值。因此,首先验证这一结论同样适用于以超多面体接受域得到的正确识别率 $P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i'\middle|H_i\right)$,再对 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_i}\right|$ 进行分析。进一步地,令 $\bar{\beta}_i$ 表示 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 至 $\bar{c}_{t_i}$ 的夹角(逆时针方向为正),$\bar{l}$ 表示 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 的模长。在 $r=2$ 条件下,$\bar{\boldsymbol{t}}$ 的概率密度函数 $\bar{f}_{\bar{t}}(\boldsymbol{\tau}|H_i)$ 可由 $[\bar{l}\ \bar{\beta}_i]^{\mathrm{T}}$ 的联合概率密度 $f_{\bar{l},\bar{\beta}_i}(l,\beta|H_i)$ 表示为[4]:

$$\bar{f}_{\bar{t}}(\boldsymbol{\tau}|H_i)=f_{\bar{l},\bar{\beta}_i}(l,\beta|H_i)=\frac{l}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(l^2+\left\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\right\|^2-2l\left\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\right\|\cos\beta\right)\right\} \tag{21}$$

式中,$\left\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\right\|=|\nabla_i|\left\|\bar{c}_{t_i}\right\|$。则 $P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i'\middle|H_i\right)$ 可表示为:

$$P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i'\middle|H_i\right)=\int_{L_i}\int_{\frac{c_{\alpha_1}}{|\cos\beta|}}^{+\infty}f_{\bar{l},\bar{\beta}_i}(l,\beta|H_i)\,\mathrm{d}l\mathrm{d}\beta \tag{22}$$

式中,$L_i=\{\bar{\beta}_i|\bar{\beta}_i\in[-\beta_{i,1},\beta_i-\beta_{i,1}]\cup[\pi-\beta_{i,1},\pi+\beta_i-\beta_{i,1}]\}$。

若各 $\bar{c}_{t_i}$ 并非全都共线(否则各备选假设不可区分,多重备选假设问题等价于单一备选假设),$\beta_{i,1}$ 和 β_i 满足 $0<\beta_{i,1}\leqslant\beta_i\leqslant\pi/2$。式(22)等价于:

$$P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i'\middle|H_i\right)=\int_{-\beta_{i,1}}^{\beta_i-\beta_{i,1}}\int_{\frac{c_{\alpha_1}}{\cos\beta}}^{+\infty}f_{\bar{l},\bar{\beta}_i}(l,\beta|H_i)\,\mathrm{d}l\mathrm{d}\beta+\int_{\pi-\beta_{i,1}}^{\pi+\beta_i-\beta_{i,1}}\int_{\frac{-c_{\alpha_1}}{\cos\beta}}^{+\infty}f_{\bar{l},\bar{\beta}_i}(l,\beta|H_i)\,\mathrm{d}l\mathrm{d}\beta \tag{23}$$

将式(21)代入式(23),通过 $u=l\cos\beta$ 进行换元,并顾及 $2\cos^2\beta=1+\cos2\beta$,则:

$$P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i'\middle|H_i\right)=\int_{c_{\alpha_1}}^{+\infty}K\int_{-\beta_{i,1}}^{\beta_i-\beta_{i,1}}K_0\,\mathrm{d}\beta\mathrm{d}u-\int_{-\infty}^{-c_{\alpha_1}}K\int_{\pi-\beta_{i,1}}^{\pi+\beta_i-\beta_{i,1}}K_0\,\mathrm{d}\beta\mathrm{d}u \tag{24}$$

式中,记 $K=\dfrac{u}{\pi}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\left\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\right\|^2-2u\left\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\right\|\right)\right\}$;$K_0=\dfrac{1}{1+\cos(2\beta)}\exp\left\{\dfrac{-u^2}{1+\cos(2\beta)}\right\}$。

根据含参变量积分求导法,将式(24)对 $\beta_{i,1}$ 求一阶导,并令导数为0,可得:

$$\frac{\partial P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i'\middle|H_i\right)}{\partial\beta_{i,1}}=\int_{c_{\alpha_1}}^{+\infty}(KK_1)\,\mathrm{d}u-\int_{-\infty}^{-c_{\alpha_1}}(KK_1)\,\mathrm{d}u=0 \tag{25}$$

式中,令

$$K_1=\frac{-1}{1+\cos 2(\beta_i-\beta_{i,1})}\times \exp\left(\frac{-u^2}{1+\cos 2(\beta_i-\beta_{i,1})}\right)+\frac{1}{1+\cos(2\beta_{i,1})}\exp\left(\frac{-u^2}{1+\cos(2\beta_{i,1})}\right)$$

考虑到K是关于变量u的递增函数，且$0<\beta_{i,1}\leqslant\beta_i\leqslant\pi/2$，故$\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$是式(25)的唯一解。为判断该点处函数的极值情况，在$\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$处对$P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)$中的$\beta_{i,1}$求二阶导可得：

$$\left.\frac{\partial^2 P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)}{\partial\beta_{i,1}^2}\right|_{\beta_{i,1}=\frac{1}{2}\beta_i}=\int_{c_{\alpha_1}}^{+\infty}(KK_2)\mathrm{d}u-\int_{-\infty}^{-c_{\alpha_1}}(KK_2)\mathrm{d}u \tag{26}$$

式中，记$K_2=(1+\cos\beta_i-u^2)\frac{4\sin\beta_i}{(1+\cos\beta_i)^3}\times\exp\left(\frac{-u^2}{1+\cos\beta_i}\right)$。

因$0<\beta_{i,1}\leqslant\beta_i\leqslant\pi/2$且$\exp\{\}$恒大于0，故$\sin\beta_i>0$、$1<1+\cos\beta_i<2$。但因$1+\cos\beta_i-u^2$项的存在，该值的正负与$c_{\alpha_1}$、$\beta_i$及$\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|$的取值密切相关，故当$u>\sqrt{2}$时，总有$\int_{c_{\alpha_1}}^{+\infty}(KK_2)\mathrm{d}u<0$，$\int_{-\infty}^{-c_{\alpha_1}}(KK_2)\mathrm{d}u>0$，此时式(26)恒小于0。但当$u\in(0,\sqrt{2}\,]$时(因$u$为积分变量，其取值与积分上、下限相关，由于$c_{\alpha_1}>0$，故$u>0$)，无法直接判断式(26)的正负。利用Matlab中integral函数进行数值模拟，给出不同β_i与$\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|$取值下$c_{\alpha_1}\in(0,\sqrt{2}\,]$范围内式(26)的结果。图3显示，该结果恒小于0。因此，$\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$是$\beta_{i,1}$在定义域内唯一的极大值点，故当$\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$时，超多面体接受域得到的正确识别率$P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)$取到最大值。

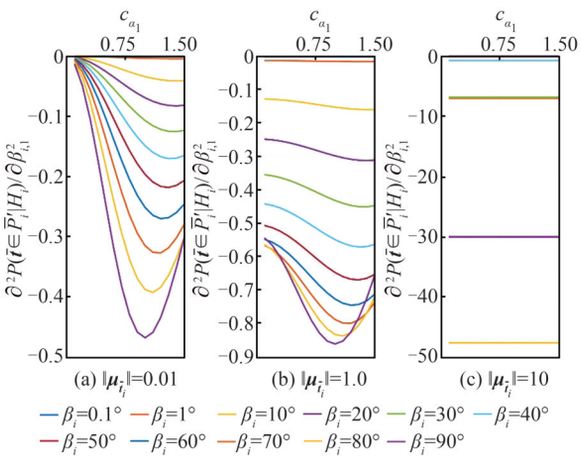


图3 $\partial^2P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)/\partial\beta_{i,1}^2$随$\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|$、$\beta_i$与$c_{\alpha_1}$的变化关系

Fig. 3 Results of $\partial^2P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)/\partial\beta_{i,1}^2$ with Varying $\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|$, β_i and c_{α_1}

结合文献[4]与式(24)～(26)的结论，可进一步分析不同接受域类型下正确识别率差异$|\delta P_{\mathrm{CI}_i}|$与$\bar{c}_{t_i}$间的关系。事实上，总希望找到该差异$|\delta P_{\mathrm{CI}_i}|$的最大值，控制其足够小，以降低接受域类型差异对正确识别率的影响。考虑到$P_{\mathrm{CI}_i}\in[0,1]$且为避免$|\delta P_{\mathrm{CI}_i}|$不可导的情况，现以$|\delta P_{\mathrm{CI}_i}|$的平方$\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$为分析对象，对$\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$中$\beta_{i,1}$求一阶导，并令该导数为0可得：

$$\frac{\partial(\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2)}{\partial\beta_{i,1}}=2\times\delta P_{\mathrm{CI}_i}\times\left(\frac{\partial P(\bar{t}\in\bar{P}_i|H_i)}{\partial\beta_{i,1}}-\frac{\partial P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)}{\partial\beta_{i,1}}\right)=0 \tag{27}$$

式中，根据文献[4]，$\partial P(\bar{t}\in\bar{P}_i|H_i)/\partial\beta_{i,1}$的表达式为：

$$\frac{\partial P(\bar{t}\in\bar{P}_i|H_i)}{\partial\beta_{i,1}}=\int_{\sqrt{k_a}}^{+\infty}\frac{u}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(u^2+\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|^2)\right]\times\left\{\exp\left[\left(u\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|\cos\beta_{i,1}\right)\right]-\exp\left[u\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|\cos(\beta_i-\beta_{i,1})\right]+\exp\left(-u\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|\cos\beta_{i,1}\right)-\exp\left[-u\|\boldsymbol{\mu}_{\bar{t}_i}\|\cos(\beta_i-\beta_{i,1})\right]\right\}\mathrm{d}u \tag{28}$$

若式(27)成立，存在如下3个条件：(1)$\delta P_{\mathrm{CI}_i}=0$；(2)$\partial P(\bar{t}\in\bar{P}_i|H_i)/\partial\beta_{i,1}=\partial P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)/\partial\beta_{i,1}$；(3)条件(1)、(2)同时成立。假设仅条件(1)成立，则可找到$\beta_{i,1}\in(0,\pi/2\,]$定义域内的点，并在该点处求$\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$对$\beta_{i,1}$的二阶导，不难得知，该点处二阶导恒大于0。因此，使得条件(1)成立时的$\beta_{i,1}$只是$\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$的极小值点。若仅条件(2)成立，由式(25)和式(28)可知，$\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$是其定义域范围内的唯一解。进一步对$\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$在$\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$处求二阶导，可得：

$$\left.\frac{\partial^2(\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2)}{\partial\beta_{i,1}^2}\right|_{\beta_{i,1}=\frac{1}{2}\beta_i}=2\times\delta P_{\mathrm{CI}_i}\times\left(\left.\frac{\partial^2P(\bar{t}\in\bar{P}_i|H_i)}{\partial\beta_{i,1}^2}\right|_{\beta_{i,1}=\frac{1}{2}\beta_i}-\left.\frac{\partial^2P(\bar{t}\in\bar{P}_i'|H_i)}{\partial\beta_{i,1}^2}\right|_{\beta_{i,1}=\frac{1}{2}\beta_i}\right) \tag{29}$$

式中,$\partial^2 P\left(\bar{\boldsymbol{t}}\in\bar{P}_i\middle|H_i\right)\Big/\partial\beta_{i,1}^2$ 即为文献[4]中的式(56)。由于式(29)自身的复杂性,无法直接分析 $\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$ 在 $\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$ 处的极值情况。故在§6部分,将结合具体算例进行数值分析。若式(29)所示的二阶导小于0,则存在唯一的极大值点,此时 $\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$ 或 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_i}\right|$ 取到最大值。需要注意的是,若条件(1)、(2)同时成立,不难发现此时 $\beta_{i,1}$ 仅是 $\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2$ 的拐点。

6　算例与分析

6.1　直接平差算例

对于直接平差问题 $E(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}x$, $\boldsymbol{A}=[1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$、$x=1$ 且 $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}}=0.1\times\boldsymbol{I}_{3\times3}$,分别采用§3.3中的3种方法计算检验决策概率。本文所有算例均设定蒙特卡洛模拟次数为 1×10^6,检验参数 $\alpha=0.01$、$\gamma=0.2$。各方法计算的检验决策概率及MDB结果见表1,闭合差 $\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^2$ 的检验空间划分如图2所示。由于该直接平差问题本质是对参数 x 进行等精度3次观测,其检验空间具有对称性,故各备选假设 H_1、H_2 和 H_3 下取得的结论一致,后续分析仅以 H_3 为例给出相应结果。

当接受域类型相同时,表1中3种方法得到的正确识别率与错误识别率大体相同(因蒙特卡洛采样的随机性导致存在较小差异,约0.01%),各方法得到的结果等价。因此,后续实验仅列出基于方法三的计算结果。图4(a)给出了变换后闭合差 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 的两类接受域 $\bar{P}_0$(黑色圆形轮廓及内部空间)和 $\bar{P}_0'$(红色六边形轮廓及内部空间)。从图4(a)的绿色及紫色部分可看出,属于 $\bar{P}_0$ 的紫色子空间并不包含于 $\bar{P}_0'$,而属于 $\bar{P}_0'$ 的绿色子空间亦不包含于 $\bar{P}_0$。类似情况也可见拒绝域中子空间 $\bar{P}_3$ 和 $\bar{P}_3'$(图4(b))。$\bar{\boldsymbol{t}}$ 落入不同的接受域或拒绝域的子空间,会得到不相同的粗差探测与识别结果。因此,接受域类型的不同会导致正确、错误识别率及粗差探测与识别结果的不同。

表1给出了 H_3 条件下不同接受域类型得到的MDB,以及以该MDB得到的检验决策概率。由表1中最后一列可知,接受域类型的不同会影响MDB的计算结果,从数值实验的角度验证了式(18)与式(19)的区别。该算例中,以超多面体为接受域(该算例中为六边形)计算得到的MDB相较于以超椭球体接受域(圆形)得到的MDB结果要小。

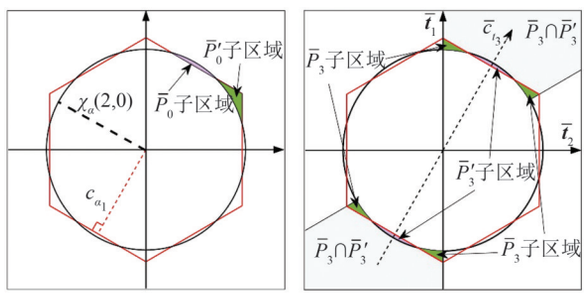
为分析接受域类型差异对正确识别率的影响,图5给出了 $\beta_{3,1}=(1/2)\beta_3$ 处,式(20)中 δP_{CI_3} 和式(29)中 $\partial^2\left(\delta P_{\mathrm{CI}_3}^2\right)\Big/\partial\beta_{3,1}^2$ 在模拟不同积分域边界夹角 β_3 时的结果。该算例中,各 $\bar{c}_{t_i}(i=1,2,3)$ 恰与积分区域夹角 $\beta_3=60°$ 的角平分线平行,故图5中红色曲线直接反映了 $\delta P_{\mathrm{CI}_3}^2$ 的极值情况。在 $\beta_3=60°$ 处,红色曲线小于0,根据式(27)及图5,此时 $\delta P_{\mathrm{CI}_i}\neq0$ 且条件(2)成立,故 $\beta_{i,1}=(1/2)\beta_i$ 是定义域 $\beta_{i,1}\in(0,\pi/2]$ 内唯一的极大值点,因此,$\delta P_{\mathrm{CI}_3}^2$ 或 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_3}\right|$ 取到最大值。此时,圆形和六边形接受域得到的正确识别率差异 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_3}\right|$ 为0.35%。该结果也与表1中根据 P_{CI_3} 列相应数据计算的结果一致。通过上述分析可知,该算例中不同接受域得到的正确识别率的差异有界。

从图5可知,模拟不同 β_3 取值下,不同接受域得到的 δP_{CI_3} 不同。当 $\beta_3=30.2°$ 时,若 $\bar{c}_{t_3}$ 恰位于 β_3 的角平分线,以圆形和六边形接受域得到的正确识别率差异 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_3}\right|=1.34\%$,该结果为其可达到的理论最大值(因在区间 $\beta_3\in(0°,60.5°)\cup(67.4°,90°]$,$\partial^2\left(\delta P_{\mathrm{CI}_3}^2\right)\Big/\partial\beta_{3,1}^2<0$)。而在区间 $\beta_3\in(60.5°,67.4°)$,$\partial^2\left(\delta P_{\mathrm{CI}_3}^2\right)\Big/\partial\beta_{3,1}^2>0$,两者正确识别率的差异达到极小值0.21%。而当 $\beta_3=60.5°$、

表1　H_3 下各方法的检验决策概率及MDB结果

Table 1　Results of Testing Decision Probabilities and MDB by Each Method of Hypothesis H_3

方法	接受域类型	P_{CD_3}/%	P_{MD_3}/%	P_{CI_3}/%	$P_{\mathrm{WI}_1}/P_{\mathrm{WI}_2}$/%	$\nabla_{3,\mathrm{MDB}}$
方法一	圆形	80.00	20.00	76.29	1.85/1.87	1.443
	六边形	80.00	20.00	76.62	1.69/1.69	1.440
方法二	圆形	80.00	20.00	76.31	1.86/1.83	1.443
	六边形	80.00	20.00	76.66	1.69/1.66	1.440
方法三	圆形	80.00	20.00	76.30	1.84/1.86	1.443
	六边形	80.00	20.00	76.65	1.67/1.68	1.440



(a) 接受域$\bar{P}_0$和$\bar{P}_0'$　　(b) 拒绝域子空间$\bar{P}_3$和$\bar{P}_3'$

图4　直接平差中闭合差 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 空间的不同接受域和拒绝域

Fig. 4　Acceptance and Critical Regions for Misclosure Space of $\bar{\boldsymbol{t}}$ in Canonical Model

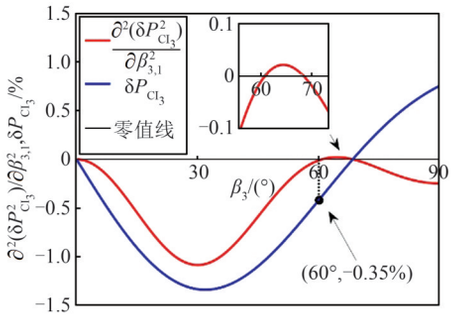


图5 直接平差中不同β_3下$\partial^2\left(\delta P^2_{CI_3}\right)\Big/\partial\beta^2_{3,1}$及$\delta P_{CI_3}$的结果

Fig. 5 Results of $\partial^2\left(\delta P^2_{CI_3}\right)\Big/\partial\beta^2_{3,1}$ and δP_{CI_3} with Varying β_3 in Canonical Model

67.4°时,$\delta P^2_{CI_3}$的一、二阶导为零,这两点对应$\delta P^2_{CI_3}$的拐点,尤其是当$\beta_3=67.4°$时,两者的正确识别率差异$\delta P_{CI_3}=0\%$,也是理论上可达到的最小值。需要注意的是,图5中$\partial^2\left(\delta P^2_{CI_3}\right)\Big/\partial\beta^2_{3,1}$与$\delta P_{CI_3}$的结果仅是针对式(29)和式(20)表达式的理论分析,实际中$\bar{c}_{t_i}$并非正好平行于β_i的角平分线,但如有必要,总可以在设计阶段确定合适的网形,使得不同接受域得到的正确识别率的差异较小。

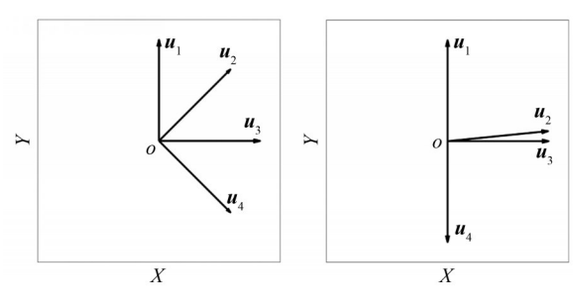
6.2 平面测边网算例

平面测边网的数学模型为:

$$\boldsymbol{A}=[-\boldsymbol{u}_1\ -\boldsymbol{u}_2\ -\boldsymbol{u}_3\ -\boldsymbol{u}_4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Sigma}_y=\sigma_0^2\boldsymbol{I}_{4\times4}\quad(30)$$

式中,$\boldsymbol{u}_i$表示未知点o至已知点$i(i=1,2,3,4)$的2×1维方向余弦向量;测距中误差σ_0设为5 mm。

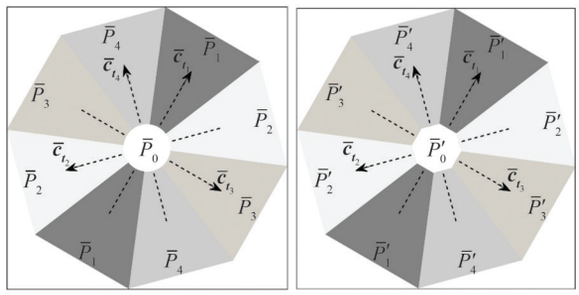
图6模拟了两个不同结构的平面测边网(Ⅰ型和Ⅱ型)。该算例中观测值个数为4,未知参数为点o的平面坐标,多余观测数$r=2$。因此$\bar{\boldsymbol{t}}\in\mathbf{R}^2$,相应网形的闭合差检验空间如图7和图8所示。表2、表3分别给出了Ⅰ、Ⅱ型网在不同备选模型H_i和不同接受域类型下得到的MDB(最后一列),以及以该MDB计算得到的正确识别率(主对角线)、错误识别率(非主对角线)结果。由于此算例中不同接受域得到的MDB差异较小,故表中数值结果未体现差异。



(a) Ⅰ型网 (b) Ⅱ型网

图6 平面测边网结构

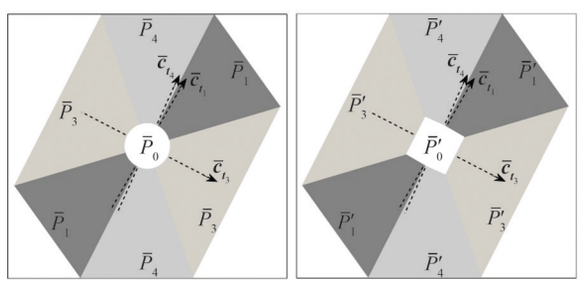
Fig. 6 Structure of Horizontal Geodetic Network



(a) 圆形接受域 (b) 八边形接受域

图7 Ⅰ型网中基于闭合差向量$\bar{\boldsymbol{t}}$的空间划分

Fig. 7 Partitioning of Misclosure Space of $\bar{\boldsymbol{t}}$ in Network Ⅰ



(a) 圆形接受域 (b) 六边形接受域

图8 Ⅱ型网中闭合差向量$\bar{\boldsymbol{t}}$的检验空间划分

Fig. 8 Partitioning of Misclosure Space of $\bar{\boldsymbol{t}}$ in Network Ⅱ

对于Ⅰ型网,检验空间中各子空间分布均匀,$\beta_i=45°(i=1,2,3,4)$;而对于Ⅱ型网,由于$\bar{c}_{t_2}$平行于$\bar{c}_{t_3}$,根据式(9)得到相关系数$\rho_{23}=-1$,H_2和H_3不可区分,对应图8(a)中$\bar{P}_2$与$\bar{P}_3$及图8(b)中$\bar{P}'_2$与$\bar{P}'_3$重合。相较于Ⅰ型网,Ⅱ型网中$\bar{c}_{t_1}$与$\bar{c}_{t_4}$的夹角更小,相关系数较大,反映H_1和H_4在Ⅱ型网中难以区分,故表3主对角线中对应H_1和H_4的正确识别率较表2中相应的结果小很多。

图9给出了Ⅰ型网在H_1条件下不同接受域类型计算的正确识别率差异$\delta P^2_{CI_1}$的极值情况。因为图7中各$\bar{c}_{t_i}$均位于β_i的角平分线处,故由图9中,当$\beta_1=45°$时的正确识别率差异$\left|\delta P_{CI_1}\right|$取到最大值0.30%。该结果与表2中根据主对角线对应H_1组数据计算得到的结果一致。

图10分别给出了Ⅱ型网在H_1、H_3条件下正确识别率差异的极值情况。由于该网形中H_1和H_4难以区分,$\bar{c}_{t_1}$靠近积分区域$\bar{P}_1(\bar{P}'_1)$的左边界$\beta_{1,1}=-2.9°$,而积分区域的夹角$\beta_1=46.4°$,$\beta_{1,1}$远小于$(1/2)\beta_1$,$\beta_{1,1}=-2.9°$不是$\delta P^2_{CI_1}$的极值点。根据表3中主对角线对应H_1组数据得到的正确识别率差异$\left|\delta P_{CI_1}\right|=0.25\%$,该结果小于图10(a)中$\beta_1=46.4°$时的理论最大值0.52%($\partial^2(\delta P^2_{CI_1})/\partial\beta^2_{1,1}<0$)。图10(b)中给出了Ⅱ型网在$H_3$条件下

表 2　Ⅰ型网中检验决策概率及 MDB 结果(圆形/八边形接受域)

Table 2　Results of Testing Decision Probability and MDB in Network Ⅰ (Circular/Octagonal Acceptance Region)

粗差位置	识别的粗差位置				$\nabla_{i,\mathrm{MDB}}$/m
	位置 1/%	位置 2/%	位置 3/%	位置 4/%	
1	69.53/69.83	5.23/5.08	0.00/0.00	5.22/5.11	0.026/0.026
2	5.26/5.11	69.49/69.76	5.24/5.13	0.00/0.00	0.026/0.026
3	0.00/0.00	5.24/5.07	69.55/69.85	5.23/5.10	0.026/0.026
4	5.24/5.10	0.15/0.05	5.22/5.06	69.54/69.86	0.026/0.026

表 3　Ⅱ型网中检验决策概率及 MDB 结果(圆形/六边形接受域)

Table 3　Results of Testing Decision Probability and MDB in Network Ⅱ (Circular/Hexagonal Acceptance Region)

粗差位置	识别的粗差位置				$\nabla_{i,\mathrm{MDB}}$/m
	位置 1/%	位置 2/%	位置 3/%	位置 4/%	
1	45.97/45.72	0.26/0.14	0.26/0.14	33.76/34.14	0.026/0.026
2	0.20/0.10	79.63/79.79	79.63/79.79	0.19/0.10	0.026/0.026
3	0.19/0.10	79.61/79.78	79.61/79.78	0.20/0.10	0.026/0.026
4	33.82/34.15	0.27/0.14	0.27/0.14	45.93/45.71	0.026/0.026

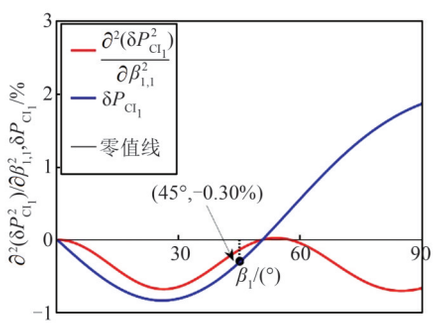
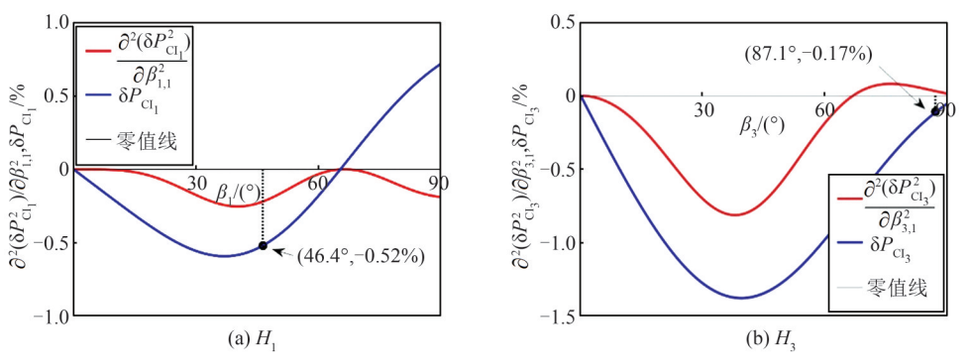


图 9　Ⅰ型网中不同 β_1 下 $\partial^2\left(\delta P^2_{\mathrm{CI}_1}\right)/\partial\beta^2_{1,1}$ 及 δP_{CI_1} 的结果

Fig. 9　Results of $\partial^2\left(\delta P^2_{\mathrm{CI}_1}\right)/\partial\beta^2_{1,1}$ and δP_{CI_1} with Varying β_1 in Network Ⅰ

正确识别率之差 δP_{CI_3} 的情况,此时 $\bar{c}_{t_3}$ 恰平行于 $\beta_3=87.1°$ 的角平分线。不同的是,此时 $\partial^2\left(\delta P^2_{\mathrm{CI}_3}\right)/\partial\beta^2_{3,1}>0$,即 0.17% 是 $\beta_3=87.1°$ 处 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_3}\right|$ 的极小值。

在网形设计阶段,找到因接受域类型的不同导致的正确识别率差异的上界更有意义。从图 9 和图 10 来看,绝大多数情况下,只要 $\bar{c}_{t_i}(i=1,2,3,4)$ 平行于 β_i 的角平分线,红色曲线表征的二阶导小于 0,就能找到正确识别率差异的最大值。此时,$\bar{c}_{t_i}$ 在积分区域 $\bar{P}_i(\bar{P}_i')$ 中任何指向下,$\left|\delta P_{\mathrm{CI}_i}\right|$ 均小于等于该差异的上界。因此,在网形设计阶段,只要控制该差异的上界足够小,便可使其不因接受域类型的不同而显著影响质量控制的结果。需要注意的是,由于正确识别率与积分区域 $\bar{P}_i(\bar{P}_i')$ 的大小成正比,对于某些重要方向上的观测值而言,在控制 $\left|\delta P_{\mathrm{CI}_i}\right|$ 上界足够小的同时,应尽量增大积分区域夹角的 β_i,从而提高该方向上对应观测值粗差的识别能力。



(a) H_1　　(b) H_3

图 10　Ⅱ型网中不同 β_i 下 $\partial^2\left(\delta P^2_{\mathrm{CI}_i}\right)/\partial\beta^2_{i,1}$ 及 δP_{CI_i} 的结果

Fig. 10　Results of $\partial^2\left(\delta P^2_{\mathrm{CI}_i}\right)/\partial\beta^2_{i,1}$ and δP_{CI_i} with Varying β_i in Network Ⅱ

6.3 单点定位算例

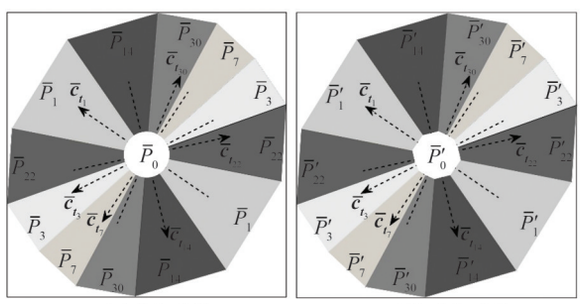
选取同时观测了6颗GPS卫星的某一历元，采用L1频伪距观测量进行单点定位(single-point positioning，SPP)，函数模型为：

$$\boldsymbol{A}=\left[-\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{1}_{6\times 1}\right] \tag{31}$$

式中，$\boldsymbol{u}=\left[\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_3\ \ \boldsymbol{u}_7\ \ \boldsymbol{u}_{14}\ \ \boldsymbol{u}_{22}\ \ \boldsymbol{u}_{30}\right]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{u}_i(i=1,3,7,14,22,30)$表示接收机至卫星$i$的$3\times 1$维方向余弦向量；$\boldsymbol{1}_{6\times 1}$表示元素全为1的列向量。伪距观测量的方差$\sigma^2$由高度角模型$\sigma^2=\sigma_0^2(1+1/\sin^2\theta)$确定，$\theta$表示卫星高度角，此处$\sigma_0^2$表示观测值噪声天顶方向的先验方差因子。

图11给出了基于闭合差$\bar{\boldsymbol{t}}$的检验空间划分，表4给出了各H_i下不同接受域类型得到的MDB，以及以该MDB得到的检验决策概率。表4显示，相同粗差位置MDB结果的差异较大，对于卫星3而言，采用不同接受域得到的MDB结果相差18 cm，而对于卫星22，MDB结果仅相差1 cm，进一步验证了接受域类型的不同对MDB计算结果存在影响。由表4可知，不同的接受域得到的决策概率不同，并且卫星3和22及卫星7和30间的错误识别率较高，导致各模型假设下正确识别率偏低。这归因于备选假设模型H_3和H_{22}以及H_7和H_{30}对应统计量间的相关系数较高，分别为-0.966和-0.983，致使相应模型之间难以区分。

为进一步分析接受域类型差异对正确识别率的影响，根据图11，选取靠近积分区域$\bar{P}_1(\bar{P}_1')$角平分线的$\bar{c}_{t_1}$和靠近$\bar{P}_{22}(\bar{P}_{22}')$边界的$\bar{c}_{t_{22}}$所对应的备选假设$H_1$、$H_{22}$为对象。图12给出了在$H_1$、$H_{22}$下，不同接受域得到的正确识别率的差值结果。图12(a)中，由于$\beta_1=44.1^\circ$，$\bar{c}_{t_1}$与$\bar{P}_1(\bar{P}_1')$右边界的夹角$\beta_{1,1}$为20.8°，此时$\beta_{1,1}$接近$(1/2)\beta_1=22.1^\circ$。因此，表4中依据主对角线对应H_1组数据计算得到$\left|\delta P_{\mathrm{CI}_1}\right|=0.41\%$与其理论最大值0.45%接近。在图12(b)中，由于$\beta_{22}=30.7^\circ$，但此时$\bar{c}_{t_{22}}$与$\bar{P}_{22}(\bar{P}_{22}')$左边界的夹角$\beta_{22,1}$仅为$-7.5^\circ$，其与$\beta_{22}$角平分线间的夹角相差较大，故$H_{22}$下实际得到的差异结果$\left|\delta P_{\mathrm{CI}_{22}}\right|=0.01\%$明显小于其理论上的最大值0.28%。虽然此时不同接受域得到的$\left|\delta P_{\mathrm{CI}_{22}}\right|$差异较小，但卫星3和22伪距观测值的粗差难以区分。从图12(b)的理论分析结果不难发现，若$\beta_{22}>80^\circ$，该算例中因接受域类型不同所导致的正确识别率差异理论上可接近3%。



(a) 圆形接受域 (b) 多边形接受域

图11 SPP中闭合差$\bar{\boldsymbol{t}}$的空间划分

Fig. 11 Partitioning of Misclosure Space of $\bar{\boldsymbol{t}}$ in SPP

表4 SPP中决策概率及MDB结果(圆形/多边形接受域)

Table 4 Results of Testing Decision Probability and MDB in SPP (Circular/Polygonal Acceptance Region)

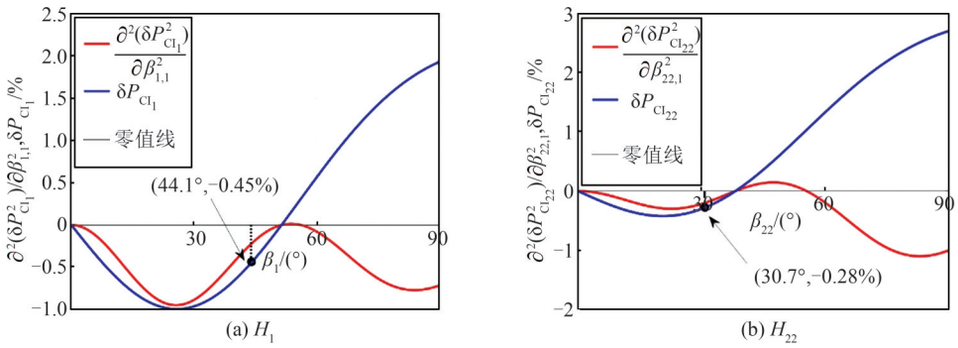
粗差位置	识别的粗差位置						$\nabla_{i,\mathrm{MDB}}$/m
	位置1/%	位置3/%	位置7/%	位置14/%	位置22/%	位置30/%	
1	68.79/69.21	0.03/0.03	0.00/0.00	6.45/6.25	4.72/4.50	0.01/0.01	14.520/14.605
3	0.50/0.47	42.79/42.69	11.89/11.92	0.01/0.01	23.90/23.97	0.91/0.94	30.172/29.99
7	0.00/0.00	12.12/12.21	38.34/38.16	2.16/2.13	0.62/0.65	26.75/26.83	28.801/28.635
14	6.46/6.26	0.00/0.00	0.24/0.24	65.16/65.43	0.00/0.00	8.14/8.04	15.124/15.157
22	4.76/4.53	22.48/22.71	1.89/1.88	0.0/0.0	50.81/50.82	0.07/0.07	14.820/14.810
30	0.01/0.01	3.63/3.67	25.15/25.29	8.39/8.32	0.10/0.10	42.71/42.61	16.668/16.602

7 结 语

本文分析了已知先验单位权方差因子条件下，多重备选假设数据探测法中接受域类型差异对检验空间划分、检验决策概率计算、最小可探测偏差及正确识别率的影响。结合直接平差、平面测边网及单点定位模型的数值实验结果，及对应检验空间的几何图形进行分析，结果表明：

1)3种针对多重备选假设检验决策概率的计算方法等价，因此，可根据实际需求来选择合适的计算方法。

2)接受域类型的差异对检验决策概率及MDB均有影响，不同模型几何条件下，其影响程度不同。



(a) H_1　　(b) H_{22}

图 12　SPP 中不同 β_i 下 $\partial^2\left(\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2\right)\Big/\partial\beta_{i,1}^2$ 及 δP_{CI_i} 的结果

Fig. 12　Results of $\partial^2\left(\delta P_{\mathrm{CI}_i}^2\right)\Big/\partial\beta_{i,1}^2$ and δP_{CI_i} with Varying β_i in SPP

3)不同接受域类型导致的正确识别率差异通常有界,对于某些重要方向上的观测值而言,在网形设计阶段可通过控制该差异的上界,并尽量增大积分区域夹角,以达到减小因接受域类型不同导致的正确识别率的差异、提高对应方向观测值粗差的正确识别率的目的。

通过本文算例的结果来看,接受域类型的差异对 MDB 及检验决策概率的大小均有一定影响,但不显著。然而,从不同接受域得到的正确识别率差异的模拟结果来看,在一定的模型几何条件下该差异较大。例如本文单点定位算例中,该差异理论上接近 3%。而从检验空间划分的几何角度来看,接受域类型的不同会改变拒绝域子空间,进而影响粗差探测和识别的结果

参　考　文　献

[1] BAARDA W. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks[M]. Deft: Netherlands Geodetic Commission, 1968.

[2] TEUNISSEN P J G. Distributional Theory for the DIA Method[J]. *Journal of Geodesy*, 2018, 92(1): 59-80.

[3] YANG L, WANG J L, KNIGHT N L, et al. Outlier Separability Analysis with a Multiple Alternative Hypotheses Test[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(6): 591-604.

[4] ZAMINPARDAZ S, TEUNISSEN P J G. DIA-Datasnooping and Identifiability[J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(1): 85-101.

[5] 李德仁, 袁修孝. 误差处理与可靠性理论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2012.
LI Deren, YUAN Xiuxiao. Error Processing and Reliability Theory[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2012.

[6] 柳景斌, 毛井锋, 吕海霞, 等. BDS/GPS组合定位可靠性分析与粗差探测研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(2): 214-223.
LIU Jingbin, MAO Jingfeng, LÜ Haixia, et al. Reliability Analysis and Gross Error Detection of BDS/GPS Combined Positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(2): 214-223.

[7] YANG Y X, XU J Y. GNSS Receiver Autonomous Integrity Monitoring (RAIM) Algorithm Based on Robust Estimation[J]. *Geodesy and Geodynamics*, 2016, 7(2): 117-123.

[8] TEUNISSEN P J G, DE BAKKER P F. Single-Receiver Single-Channel Multi-frequency GNSS Integrity: Outliers, Slips, and Ionospheric Disturbances[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(2): 161-177.

[9] LI B F, WANG M M, SHEN Y Z. The Hypothesis Testing Statistics in Linear Ill-Posed Models[J]. *Journal of Geodesy*, 2021, 95(1): 11.

[10] YANG L, SHEN Y Z, LI B F, et al. Simplified Algebraic Estimation for the Quality Control of DIA Estimator[J]. *Journal of Geodesy*, 2021, 95(1): 14.

[11] GAO Y T, GAO Y, LIU B Y, et al. Enhanced Fault Detection and Exclusion Based on Kalman Filter with Colored Measurement Noise and Application to RTK[J]. *GPS Solutions*, 2021, 25(3): 82.

[12] YU Z J, ZHANG Q Z, ZHANG S B, et al. A State-Domain Robust Autonomous Integrity Monitoring with an Extrapolation Method for Single Receiver Positioning in the Presence of Slowly Growing Fault[J]. *Satellite Navigation*, 2023, 4(1): 20.

[13] LEHMANN R, LÖSLER M. Multiple Outlier Detection: Hypothesis Tests versus Model Selection by Information Criteria[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2016, 142(4): 04016017.

[14] IMPARATO D, TEUNISSEN P J G, TIBERIUS C C J M. Minimal Detectable and Identifiable Biases for Quality Control[J]. *Survey Review*, 2019, 51(367): 289-299.

[15] 罗志才,周波阳,钟波,等.卫星重力梯度测量数据的粗差探测[J].武汉大学学报(信息科学版),2012,37(12):1392-1396.
LUO Zhicai, ZHOU Boyang, ZHONG Bo, et al. Outlier Detection of Satellite Gravity Gradiometry Data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(12): 1392-1396.

[16] LEHMANN R. Improved Critical Values for Extreme Normalized and Studentized Residuals in Gauss-Markov Models [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(12): 1137-1146.

[17] 郭斐.GPS精密单点定位质量控制与分析的相关理论和方法研究[D].武汉:武汉大学,2013.
GUO Fei. Theory and Methodology of Quality Control and Quality Analysis for GPS Precise Point Positioning [D]. Wuhan: Wuhan University, 2013.

[18] YANG L, LI Y, WU Y L, et al. An Enhanced MEMS-INS/GNSS Integrated System with Fault Detection and Exclusion Capability for Land Vehicle Navigation in Urban Areas [J]. *GPS Solutions*, 2014, 18(4): 593-603.

[19] YANG L, LI B F, SHEN Y Z, et al. Extension of Internal Reliability Analysis Regarding Separability Analysis [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2017, 143(3): 04017002.

[20] YU H, LIAN D J, CHEN G D, et al. Efficiency Evaluations of Statistical Decision Probabilities with Multiple Alternative Hypotheses for Quality Control [J]. *GPS Solutions*, 2022, 26(2): 62.

[21] ROFATTO V F, MATSUOKA M T, KLEIN I, et al. An Artificial Neural Network-Based Critical Values for Multiple Hypothesis Testing: Data-Snooping Case [J]. *Survey Review*, 2022, 54(386): 440-455.

[22] ZHANG Z T, YUAN H J, HE X F, et al. Cycle Slip Detection and Repair Based on the Unmodeled-Error-Constrained Geometry-Free Combining Geometry-Based Models for a Single-Frequency Receiver [J]. *Measurement*, 2023, 217: 113090.

[23] 杨玲,喻杨康.Baarda数据探测法中的粗差误判分析[J].同济大学学报(自然科学版),2018,46(10):1440-1447.
YANG Ling, YU Yangkang. Separability Analysis for Baarda Data Snooping Method [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2018, 46(10): 1440-1447.

[24] 鲁铁定,杨元喜,周世健.均值漂移模式几种粗差探测法的MDB比较[J].武汉大学学报(信息科学版),2019,44(2):185-192.
LU Tieding, YANG Yuanxi, ZHOU Shijian. Comparative Analysis of MDB for Different Outliers Detection Methods [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(2): 185-192.

[25] 胡宇,姚宜斌,方兴,等.论平差模型的关系与几何解释[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(8):1366-1372.
HU Yu, YAO Yibin, FANG Xing, et al. Relationship and Geometric Interpretation of Adjustment Models [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(8): 1366-1372.

[26] HU Y, FANG X. Linear Estimation Under the Gauss-Helmert Model: Geometrical Interpretation and General Solution [J]. *Journal of Geodesy*, 2023, 97(5): 44.