第 50 卷 第 3 期：905-923 高电压技术 Vol.50, No.3: 905-923
2024 年 3 月 31 日 High Voltage Engineering March 31, 2024
OI: 10.13336/j.1003-6520.hve.20240382

电工装备低频电磁仿真中若干关键问题研究现状及趋势

任卓翔[1,2]，闫　帅[1]，陈志福[1]，徐小宇[1]，付小同[1,3]，郭　泽[1,3]，
周亚星[1]，杨　帆[4]
（1. 中国科学院电工研究所，北京 100190; 2. 索邦大学，巴黎 F75005; 3. 中国科学院大学，北京 100049;
4. 输变电装备技术全国重点实验室(重庆大学电气工程学院)，重庆 400044）

摘　要：低频电磁场仿真是电气装备智能化的基础核心技术。该文基于计算电磁学自 20 世纪 60 年代以来的发展历程，讨论了低频电磁场仿真中若干关键问题的发展现状，展望了当前数值仿真领域的发展趋势。首先，介绍了低频电磁场计算基本方程及数值离散方法；其次，对低频电磁场计算中材料建模的均一化、各向异性、磁滞模型等方面开展了分析和探讨； 随后，针对空间多尺度、趋肤效应、开放边界以及变形与运动对低频电磁场仿真中网格和离散格式的特殊性进行了阐释，分析了当前电磁-力-热多物理耦合中的关键问题，介绍了数字孪生模型构建中基于物理模型和数据驱动的建模方法及近期工作；最后，对数值仿真在优化设计、人工智能、新一代仿真软件等方面的发展趋势进行了分析和展望。当前，多尺度多物理耦合建模仿真方法仍是电磁场计算领域的研究重点。传统数值仿真与新兴计算技术、人工智能的结合愈加紧密。智能制造和数字孪生等前沿需求下，电磁场计算面临高效迭代仿真和实时仿真的挑战，由物理模型和数据共同驱动的替代建模是解决这两方面挑战的重要手段。工业 CAE 仿真软件架构正在发生着深刻变革，迫切需要我国自主 CAE 仿真软件核心技术及应用生态的提升。

关键词：计算电磁学；有限元；数字孪生；人工智能；工业仿真软件

State of the Art and Trend of Several Key Issues in Low Frequency Electromagnetic Simulation of Electrical Equipment

REN Zhuoxiang[1,2], YAN Shuai[1], CHEN Zhifu[1], XU Xiaoyu[1], FU Xiaotong[1,3], GUO Ze[1,3],
ZHOU Yaxing[1], YANG Fan[4]
(1. Institute of Electric Engineering, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 2. Sorbonne University, Paris F75005, France; 3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 4. State Key Laboratory of Power Transmission Equipment Technology, School of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract：Low-frequency electromagnetic field simulation is the fundamental and key technology for the artificial intelligence of electrical equipment. Based on the development history of computational electromagnetics since the 1960s, this paper discusses the state of art of several key issues in low-frequency electromagnetic field simulation and looks forward to the current development trend in the field of numerical simulation. Firstly, the basic equations and numerical discretization methods of low-frequency electromagnetic field calculation are introduced. Secondly, the issues including homogenization, anisotropy and hysteresis model in material modelling are analyzed and discussed. Subsequently, the special characteristics of mesh and discrete format in low-frequency electromagnetic field simulation are explained from several aspects, such as multi-scale problem, skin effect, open boundary as well as deformation and motion; the current development trends of electromagnetic-thermal-structural multi-physics coupling are then analyzed; physical model-based and data-driven modelling approaches as well as recent work in digital twin model building are introduced. Finally, the development trend of numerical simulation in optimal design, digital twin, artificial intelligence and new generation of simulation software is analyzed and discussed. At present, multi-scale and multi-physics coupled modeling and simulation

基金资助项目：中国科学院战略性先导科技专项 (XDB0640000)；国家自然科学基金 (52277019)；中国科学院电工研究所科研基金 (E155620101)。
Project supported by Strategic Priority Research Program of the Chinese Academy of Sciences (XDB0640000), National Natural Science Foundation of China (52277019), Research Foundation of the Institute of Electrical Engineering, CAS (E155620101).

is still a focus of research in the field of electromagnetic field computation. The integration of the traditional numerical simulation with emerging computing technologies and artificial intelligence is becoming more and more significant. Under the cutting-edge needs of smart manufacturing and digital twins, electromagnetic field computation faces the challenges of efficient iterative simulation and real-time simulation. Physics and data-driven based surrogate modeling is a key technology to resolve the two issues. Industrial CAE simulation software architecture is undergoing a profound change, there is an urgent need to enhance the core technology and application ecology of China's self-developed CAE simulation software.

Key words: computational electromagnetics; finite element; digital twin; artificial intelligence; industrial simulation software

0 引言

电磁场仿真的核心是对电磁学的基本物理方程——麦克斯韦方程组进行求解，得到电场与磁场的时空分布，以及电磁场引起的损耗和作用力等衍生量。电磁场仿真在电气及电子设备的性能分析及优化设计中发挥着重要作用。随着工业的数字化智能化转型，电磁场仿真在电气及电子设备的智能制造、监测、控制及全生命周期管理方面也开始受到广泛关注。

电磁场仿真中的高频和低频问题主要由待仿真结构的特征尺寸、材料特性和运行频率区分。当特征尺寸远小于电磁场波长及电流趋肤深度时，可忽略电场和磁场之间的耦合效应，求解静态问题；当特征尺寸接近电流趋肤深度时，需要考虑涡流的影响，如果位移电流产生的磁场远小于传导电流产生的磁场，可求解准静态磁场问题；如果磁场变化感应的电场远小于电荷产生的电场，则可求解准静态电场问题。在这 3 种情况下，麦克斯韦方程组中的部分项被忽略。静态和准静态问题的求解统一称为低频电磁场仿真。高频电磁场仿真指当特征尺寸接近或大于波长时，必须考虑电磁场的波动效应，即求解全部麦克斯韦方程组，因此高频问题也被称为全波问题。低频电磁场和高频电磁场仿真中涉及的材料特性、边界条件及应用领域都有较大差别。如针对材料特性，低频电磁场仿真中的难点主要在于材料本构的非线性，高频电磁场仿真的主要难点在于色散效应；针对边界条件，低频电磁场仿真中关注的主要问题是开放空间的近似，高频电磁场仿真中由于要考虑电磁波的辐射效应，需要在计算区域外围添加吸收边界，避免“伪反射”问题。本文聚焦低频电磁场问题，分析其中若干关键问题的发展现状及趋势。

由于实际工程应用中结构、材料、工况的复杂性，一般难以对麦克斯韦方程组进行解析求解，因此数值方法成为电磁场仿真的重要工具。电磁场数值计算方法可分为微分方程方法和积分方程方法。微分方程包括有限差分法(finite difference method, FDM)、有限积分法(finite integration technique, FIT)、有限元法(finite element method, FEM)等，积分方程方法包括矩量法(method of moment, MoM)、边界元法(boundary element method, BEM)及部分元等效电路(partial element equivalent circuit, PEEC)等。

在低频电磁场数值求解算法中，工程应用最广泛的是有限元方法。有限元方法的概念最早于 1956 年被提出[1]，但其理论基础可追溯到 R. Courant 于 1943 年发表的关于变分法原理的论文[2]，“有限元”这一名称则是 1960 年由 R. W. Clough 在平面应力分析的论文中给出[3]。1969 年，P. Silvester 和 M. V. K. Chari 首次将有限元应用到电磁场数值计算中[4]。由于热学、力学中常用的点单元无法描述界面上电磁学问题中矢量场某些分量的不连续性，1977 年起，在电磁场计算中发展出了棱单元法[5-6]。1982 年，法国电力公司的 A. Bossavit 等编写了第 1 套基于 3 维棱单元的电磁场计算程序 TRIFOU[7]。1988 年，A. Bossavit 将电磁场计算的有限元方法和微分几何建立起联系[8]，提出有限元的插值函数(包括点单元、棱单元、面单元、体单元)均可写成 Whitney 微分形式，为电磁场有限元计算夯实了理论基础。

自 20 世纪 80 年代中期以来，基于数值电磁计算方法的商业软件开始出现，工程师可以方便地通过图形界面调用底层算法进行仿真分析，这类软件被称为 CAE (computer-aided-engineering) 软件。早期的电磁场仿真商业 CAE 软件包括 Ansoft、Vector Fields、Flux、CST、Infolytica 等，其中大多以有限元为主要的底层数值算法，经过不断的并购整合，这些软件目前大都被工业巨头(如 Ansys、Altair、Dassault、Simens 等)收购，与 CAD 工具、网格剖

分工具、其他物理场仿真工具、优化工具、系统化建模工具整合，成为系统化工业软件平台的一部分。

近年来，国内自主研发 CAE 软件快速发展，在结构、热、流体、电磁等不同学科均有自主仿真软件发布。低频电磁场仿真方面的 CAE 软件包括中国科学院电工研究所开发的 EMPbridge 电磁及多物理仿真平台、云道智造开发的 Simdroid 仿真平台、英特仿真开发的 INTESIM-MultiSim 仿真平台等。

1　低频电磁场基本方程和数值离散方法

麦克斯韦方程组由描述法拉第定律、安培定律、磁通连续性定律和高斯定律的 4 个方程组成：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0 \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\rho \tag{4}$$

式中：ρ、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{D}$ 分别代表电荷密度、电场强度、磁场强度、磁通密度、电流密度及电通量密度；curl 为旋度算子；div 为散度算子。上述场量之间满足以下材料本构关系：

$$B=\mu\boldsymbol{H},\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{5}$$

式中：μ、ε、σ 分别代表磁导率、介电常数及电导率。

在利用有限元等数值方法进行离散和求解前，需要选择合适的求解变量，并施加边界条件，把方程组转换为适定的待求解问题。

本章以准静磁场问题为例介绍求解变量的选取及其数值离散。在准静磁场的假设中，位移电流产生的磁场可忽略不计，即在方程(2)中忽略 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 项。此时方程(2)与(4)解耦，因此也不考虑自由电荷产生的电场即方程(4)。

1.1　准静磁场的对偶方程式

低频电磁场计算中，出于数值稳定性的考虑，通常选择位函数作为求解变量[9-10]。对考虑涡流的准静磁场问题，常见的求解变量组合有两种。第一种是以磁矢量位 $\boldsymbol{A}$(满足 $\mathrm{curl}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$)及导体区域的电标量 v(满足 $\boldsymbol{E}=-\partial t\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}v$)作为变量，方程转换为如下形式进行求解：

$$\mathrm{curl}\frac{1}{\mu}\mathrm{curl}\boldsymbol{A}+\sigma(\partial t\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}v)=\boldsymbol{j}_0 \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\sigma(\partial t\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}v)=0 \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{j}_0$ 为激励电流密度。

第二种是以磁标量位 φ (无电流且单连通区域满足 $\mathrm{grad}\varphi=\boldsymbol{H}$)及导体区域的电流矢量位 $\boldsymbol{T}$(满足 $\mathrm{curl}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}$ 及 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{T}+\mathrm{grad}\varphi$)作为变量，方程转换为如下形式进行求解：

$$\mathrm{curl}\frac{1}{\sigma}\mathrm{curl}\boldsymbol{T}+\partial t\mu(\boldsymbol{T}+\mathrm{grad}\varphi)=-\partial t\mu\boldsymbol{H}_0 \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\mu(\boldsymbol{T}+\mathrm{grad}\varphi)=-\mathrm{div}\mu\boldsymbol{H}_0 \tag{9}$$

式中：grad 为梯度算子；$\boldsymbol{H}_0$ 为任一满足 $\mathrm{curl}\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{j}_0$ 的源场。

两种格式分别称为 $\boldsymbol{A}$-v 形式和 $\boldsymbol{T}$-φ 形式。在数值求解中，两种格式各有优劣。$\boldsymbol{T}$-φ 形式的矢量未知量 T 仅在导体区域，因此总体上求解自由度较小。但当涉及多联通区域时，磁标量位违反安培环流定律，需要通过区域的拓扑性质引入“切”并添加相关约束保证方程的适定性[11]，相关算法实现复杂性较高。$\boldsymbol{A}$-v 形式在整个求解区域离散磁矢量位 $\boldsymbol{A}$，求解自由度较大，且方程组的解存在唯一性问题，一般可通过不同方式添加库伦规范 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ 确保解的唯一性。当激励电流满足相容性条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{j}_0=0$ 时，共轭梯度等常用迭代求解器可以实现自动规范，从而避免添加规范约束[12]。

1.2　棱单元

针对方程(6)—(9)，用有限元方法进行离散的步骤包括：(1)通过变分法将原始问题表述为弱形式的积分方程；(2)通过网格单元划分和在各单元上对待求变量进行插值近似，实现对原始问题无限维解空间的有限维离散逼近；(3)最终将待求解的偏微分方程组转化为代数方程组进行求解。

如 1.1 节所述，电磁场数值离散和求解涉及的求解变量包括标量和矢量。当待求解变量为标量时，有限元的插值函数为节点单元，即点连续的标量函数。当待求变量为矢量时，若采用点连续函数来近似其各个分量，将节点单元用于矢量的各个分量，相当于在单元的分解面上强加矢量的所有分量的连续性。这样的近似方法将破坏矢量变量的物理特性，因为线矢量场(包括 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{T}$)在不同材料之间的界面处具有不连续的法向分量，而面矢量(包括 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$)在不同材料的交界界面处具有不连续的切向分量。方程(6)—(9)中涉及的线矢量场的插值函数需要定义在泛函空间(Ω 为求解区域)：$\boldsymbol{H}(\mathrm{curl},\Omega)=\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega),\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)\}$ 中以保证线矢量场界面上切向连续、法向不连续的物理特性。$\boldsymbol{H}(\mathrm{curl},\Omega)$ 空间中的离散插值函数称为棱单元，最早在 1980

年由 Nedelec 引入，也被称为 Nedelec 单元[6]。Alain Bossavit 和 Robert Kotiga 等人在低频电磁场计算中应用了微分几何中惠特尼(Whitney) 微分形及外代数相关理论构造有限元空间，并引入惠特尼单元[8]。用这一理论体系构造的有限元空间具有包含特性，即惠特尼节点单元来近似标量场保证了其梯度场的旋度为零的特性；用惠特尼棱单元来近似矢量场保证了其旋度场的散度为零的特性，从而构成了一组表达简洁且自然适用于电磁变量离散的有限元空间。

3 维四面体单元的一阶惠特尼节点单元表达形式为：

$$\boldsymbol{w}_i^0(x)=\lambda_i(x), i\in\{1,2,3,4\} \tag{10}$$

式中：$\lambda_i(x)$ 为第 i 个单元顶点对应的重心坐标。相对于节点 i, j 构成的棱边(由顶点 i 指向顶点 j)，其惠特尼棱单元表达形式为：

$$\boldsymbol{w}_i^1(x)=\lambda_i(x)\operatorname{grad}\lambda_j(x)-\lambda_j(x)\operatorname{grad}\lambda_i(x) \tag{11}$$

式中：$l\in\{1,2,3,4,5,6\}$ 为棱边编号；插值函数 $w_i^0(x)$ 和 $w_i^1(x)$ 的上标 0、1 表示其对应微分形的阶数。图 1 给出在一个单元中棱单元的取值分布。

作为例子，图 2 给出了对电磁场计算基准问题 7 (T.E.A.M 7；非对称带孔导体板内涡流场计算)在相同网格下分别用 1.1 节中介绍的两种对偶离散形式进行计算的结果，计算网格总数为 16 977 个四面体单元。***T*-φ** 形式计算涉及 2004 个棱边自由度、2979 个节点自由度以及由区域多联通性引入的一个“切”自由度；***A*-*v*** 形式计算涉及 19 353 个棱边自由度和 1145 个节点自由度。计算基于自主开发的电磁及多物理耦合仿真平台 EMPbridge 实现。

2 低频电磁场计算中的材料建模

材料建模对数值求解的精确性至关重要。材料建模涵盖范围很广，包括建立材料本构特性以及其与制造工艺、工况、环境等不同影响因素之间关系的数学模型。本章针对低频电磁场材料建模中空间多尺度及均一化、各向异性及磁滞模型几个重要方面展开讨论。

2.1 空间多尺度及均一化

空间多尺度指研究对象或其组件结构几何特征尺寸跨度大。电气设备及部件仿真中涉及空间多尺度问题的典型结构包括绕组、叠片铁芯、复合材料等。若在数值计算中将细小尺度的结构进行网格

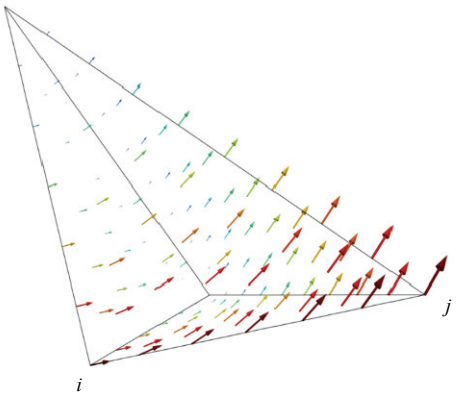


图 1 棱单元插值函数在四面体单元中的分布

Fig.1 Distribution of the edge element interpolation function in a tetrahedron

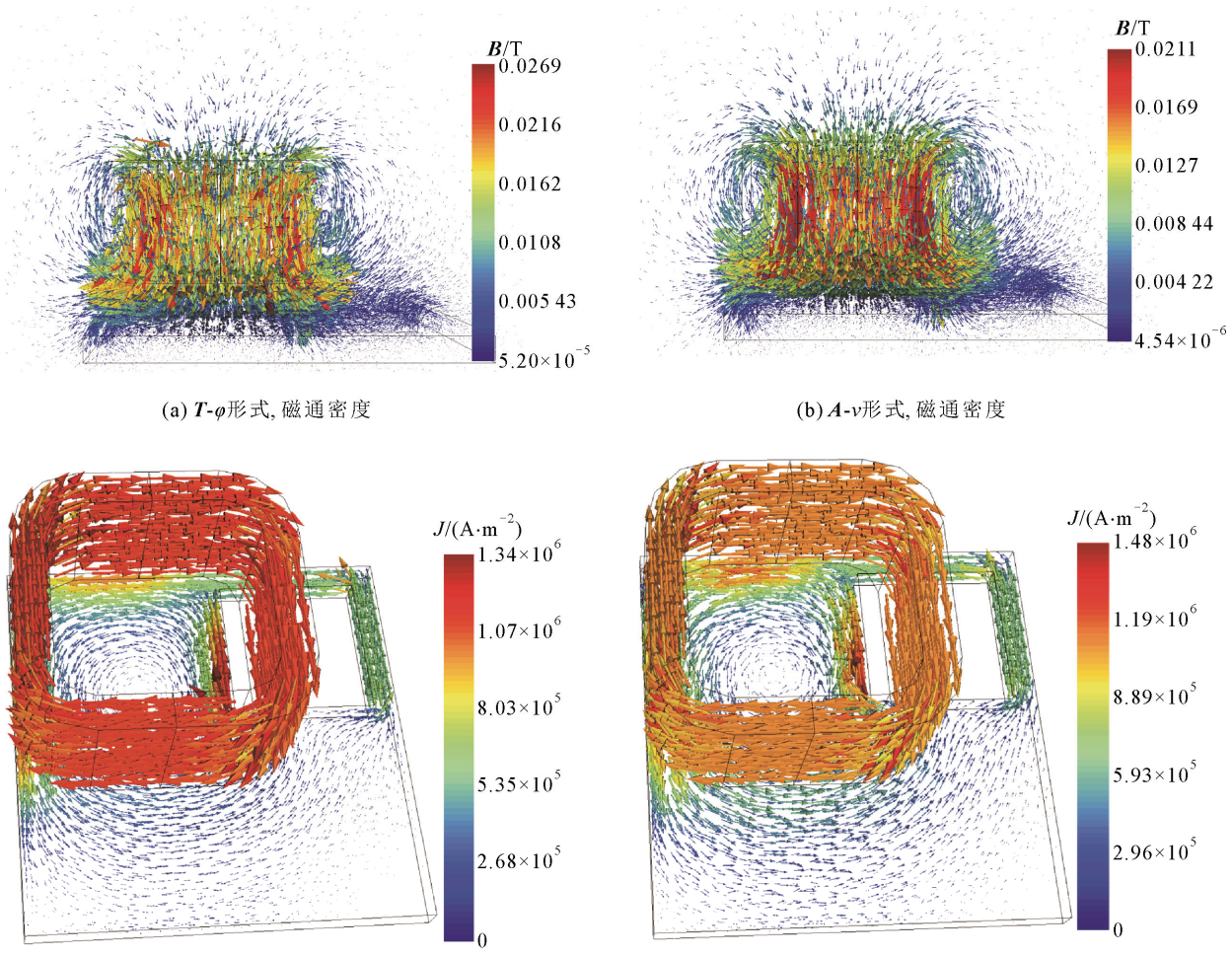
划分和离散会导致网格量过大、难以剖分或网格质量差、计算难以收敛等问题。

空间多尺度问题的常见处理方法是均一化(homogenization)，即将周期规律排列的精细结构视为单一材料区域，通过对材料局部的小尺度建模得到其等效材料本构特性，再将其应用于数值仿真[13]。通过均一化处理，场在小尺度结构中的变化被忽略，从而可以更高效地实现网格剖分、数值离散和求解。均一化的关键是定义周期单元或局部问题，即在每个周期单元或精细结构局部给定边界条件，建立合理的求解模型。

均一化相关工作包括：文献[14-15]分别采用均一化方法针对含有磁电复合材料、多铁性纳米粒子复合材料的器件进行仿真；文献[16]介绍了一种硅钢叠片的时域非线性均一化方法；文献[17]用均一化方法评估可控永磁材料的等效磁导率和剩磁；文献[18]考虑利兹线内部绞线之间的渐近效应及绞线内的环流，给出了一种基于等效复磁导率的均一化方法，以实现利兹线损耗的精确计算。在涉及复杂多尺度结构的电气设备多物理仿真中，均一化也是提高计算效率和收敛性的重要手段，在变压器电磁-热-流耦合仿真中，文献[19]先对变压器绕组区域截面进行局部 2 维流体建模仿真，得到绕组区域的等效热导率，再将其应用于 3 维温升计算中。

2.2 各向异性

材料各向异性是指在不同方向上的材料属性不同。电磁学中主要涉及介电常数、电导率、磁导率的各向异性，在麦克斯韦方程中体现为材料本构



(a) ***T*-φ**形式, 磁通密度　(b) ***A*-*v***形式, 磁通密度

(c) ***T*-φ**形式, 电流密度　(d) ***A*-*v***形式, 电流密度

图 2　电磁场计算基准问题 7 (T.E.A.M 7)用两种计算格式得到的磁通密度和电流密度分布

Fig.2　Flux density and current density distributions obtained from two formulations for the Testing Electromagnetic Analysis Methods Problem 7 (T.E.A.M 7)

关系式(5)中的 μ、ε、σ 不能由标量描述，而表达为如下张量形式：

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{bmatrix} \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{m}$ 泛指介电常数、电导率、磁导率等材料属性，下标表示张量中各元素关联的空间坐标分量。材料各向异性是材料和介质中的常见性质，通过 2.1 节所述均一化方法得到的等效材料属性也常常是各向异性的。

在低频电磁场分析中，铁磁材料的各向异性建模是一个难点问题。铁磁材料具有磁滞效应，在变压器、电机等电气设备中，硅钢片的轧制工艺、退火工艺和叠压均会影响材料各向异性特性，材料的磁化曲线会随着磁化方向的夹角变化，需要由矢量磁滞模型描述[20]。由于矢量磁滞模型的建模和与数值计算方法的结合尚不成熟，目前在数值计算中一般的处理方法为正交各向异性简化，即在 3 个主轴方向分别输入 3 条 *B*-*H* 曲线[21]。

2.3　磁滞模型

铁磁性材料作为电气设备的核心部件，起着电能转换的作用，这类材料包括各类软磁材料(如铁氧体、硅钢和非晶等)和永磁材料(如 NdFeB、SmCo 等)。铁磁性材料的精确建模对电磁场计算至关重要，也是电磁场计算领域的重点和难点，吸引国内外学者不断开展研究。

对于材料模型的研究主要集中在两个方面：一是建立计算简单、精确描述磁滞回线的磁滞模型；二是将磁滞模型与有限元计算耦合，实现考虑磁滞效应的电磁场精确计算。

磁滞模型按照不同的分类方法，可分为算子磁滞模型(如 Preisach 模型[22]、Prandtl-Ishlinskii 模型[23]

等)；微分磁滞模型(如 Jiles-Atherton[24-26]、Tellinen[27]模型)；矢量磁滞模型(如 Stoner-Wolhfarth[28]模型、Enokizono-Soda[29]模型、Chua 模型[30]等)；其中应用最广泛的 3 类模型为：Preisach 模型、Jiles-Atherton(J-A)模型和 Stoner-Wolhfarth(S-W)模型。原始 Preisach 模型和 J-A 模型均为静态标量模型，为扩大模型应用范围，文献[31-32]提出了相应的动态矢量模型及逆模型，为进一步提高模型精度，简化计算，文献[33-35]提出了一系列的改进模型。S-W 模型是最早提出的矢量磁滞模型，但由于不考虑粒子间的相互作用，因此不能考虑磁化历史对未来磁化过程的影响，也不能解释涡流损耗。

由于磁滞模型种类较多和磁滞模型本身的复杂性，磁滞模型与有限元计算的耦合方法也不尽相同，收敛性问题是含磁滞效应有限元计算问题的难点之一。为提高收敛性，需要对非线性迭代算法进行深入研究和优化，如牛顿法、固定点迭代算法以及相应的改进算法。部分相关工作包括；文献[36]针对与磁滞模型耦合的时域有限元计算中收敛困难的问题，提出了一种更稳定的时间离散格式；文献[37]采用牛顿法和固定点迭代算法结合的方法，改善耦合磁滞效应的非线性计算收敛性。

磁滞模型根据激励的不同，又分为静态磁滞模型和动态磁滞模型，其中动态磁滞模型中的时间变量离散问题是含磁滞效应有限元计算问题的难点之二，常用的时间离散方法有瞬态法、时谐法[38]和时间周期法[39]。

此外，磁滞模型还可分为标量模型和矢量模型，矢量模型可用来分析各向异性问题(见 2.2 节)，由于目前 2 维和 3 维矢量模型的参数识别过程需要特定磁测量设备获取关键参数，导致该类问题的研究较少，矢量磁滞模型与有限元计算耦合问题为含磁滞效应有限元计算问题的难点之三。

近年来，随着人工智能的兴起和在不同领域的扩展应用，人工神经网络成为了磁滞建模的一个重要工具。主要的研究方向集中在两个方面：人工神经网络磁滞模型和基于神经网络的传统磁滞模型。神经网络磁滞模型通过前馈或反向神经网络模型直接给出材料的 *B-H* (输入和输出)关系；基于神经网络的传统磁滞模型主要通过神经网络算法来获取相应磁滞模型的参数，即采用神经网络算法实现传统磁滞模型的参数识别。文献[40]对相关方法进行了综述和对比研究。另外，基于数据驱动思想，文献[41]提出采用一种结合原始磁测量数据与有限元计算的新范式，跳过磁滞建模的步骤直接进行求解，这一方法适用于强非线性问题，但数据噪声对求解收敛性有较大影响。

3 低频电磁场计算网格与离散的特殊性

网格剖分在有限元计算中承上启下，上接物理与几何模型，下连离散求解程序。本章从低频电磁场计算关注的一些物理、几何特性归纳一部分相关网格及数值离散方面的针对性处理方法和研究成果。

3.1 空间多尺度

空间多尺度问题在 2.1 节中已经介绍和探讨，对周期规律排列的精细结构可通过材料均一化建模的方法进行处理。针对非周期排列的细薄结构，可通过对局部数值离散格式的特殊处理，包括对薄层或细线结构采用壳单元或线单元，以及耦合局部解析模型等。

局部特殊离散相关工作包括：文献[42-43]采用壳单元进行薄层结构的离散；文献[44]采用 1 维线单元与 3 维四面体单元结合的方法处理接地网的空间多尺度问题；文献[45]引入解析模型表征铁磁材料晶体各向异性和纹理，对器件磁致伸缩效应进行简化的多尺度建模仿真；文献[46]引入解析模型对利兹线的趋肤效应、渐近效应及 3 维的扭转效应进行描述，并应用于有限元计算。对涡流场小透入深度趋肤效应的多尺度问题将在 3.2 节专门讨论。

3.2 趋肤效应

在块状导体内，如果材料均匀，μ 和 σ 均为常数，感应电流的时空分布满足扩散方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\boldsymbol{J} \tag{13}$$

由于电磁场沿垂直于导体表面方向的梯度远大于场在表面切向方向的梯度，考虑方程(13)的一维近似，其时谐解为：

$$\left|\boldsymbol{J}(z)\right|=\left|\boldsymbol{J}(0)\right|\mathrm{e}^{-\frac{z}{d}} \tag{14}$$

式中：z 为距离导体表面的垂直方向深度；$d=\sqrt{2/(\omega\sigma\mu)}$ 为趋肤深度。

3.2.1 趋肤效应对网格单元的要求

由式(14)可知，当导体中存在交变电磁场时，导体内部的感应电流集中在靠近导体外表的薄层，向导体内指数衰减。趋肤深度是用于描述电流密度衰减的特征常数，在有限元计算时为了准确计算电

磁场分布以及感应电流所引起的损耗，趋肤深度可以作为描述有限元网格划分的参考。

对于网格尺度的选取，文献[47]根据电流密度等梯度下降的原则进行网格划分，并给出分层下均匀介质中损耗相对误差估计公式，其中分 5 层划分，即分别取 z=0.22d、z=0.51d、z=0.92d、z=1.61d、z=5.00d。

此外，对于棱边单元，为能够准确描述感应电流的空间分布，需要尽量使用二阶插值函数。由于一阶棱边单元边自由度的数目小于单元结点上场分量的个数，例如，四面体单元有 6 个边自由度，但 4 个结点上场分量有 12 个，因此，一阶边单元不能完全描述单元内任意可能的线性的场分布，在计算趋肤效应方面有缺陷。

3.2.2　TEAM 21 标准问题

导体内部的感应电流大小和分布难以直接测量。通过测量感应电流产生的热效应可以间接验证感应电流计算的准确性。TEAM21 标准问题是由程志光教授等人从变压器设计制造的实际工程问题中提炼出来用来验证电磁热分析计算准确性的国际计算电磁标准问题，给出了大量可以用于验证的实验测试数据[21]。

在处理 TEAM21 计算模型时，文献[21]提到：对于线性材料情况，一阶棱单元计算结果与实验误差较小。非线性材料(考虑 *B-H* 曲线磁饱和)情况，一阶单元计算结果误差大，需要采用二阶棱单元。同时，感应电流的分布集中在空间狭小区域，通过局部网格细化，能在较小的计算规模得到较精确的仿真结果。边界层网格划分和网格自适应技术有助于高效准确求解变压器中的感应发热问题。

3.2.3　阻抗边界条件

根据斯涅尔定律，电磁波由低电导率介质进入高电导率介质时，不论入射角大小，其折射角都接近零。并且当趋肤深度远小于导体厚度，可假设电磁波在导体内完全衰减。在导体集肤层中的电磁场可近似为阻尼平面波在垂直于导体表面方向的传播[48-49]。对于在线性材料良导体中传播的平面电磁波，根据其电磁场方程和解的特性，可得到描述电场强度与磁场强度幅值比值的固有阻抗只与材料属性和激励源频率相关：

$$\eta \approx \frac{E_y}{H_x} = \frac{1+j}{\sigma d} \tag{15}$$

式中：E_y 和 H_x 分别为电场和磁场在导体表面相互正交的切向分量。

根据场的连续性，导体表面的阻抗等于固有阻抗。因此，由式(15)定义的导体表面电场磁场切向分量之间的依赖关系可作为边界条件应用到导体外部的电磁场求解。此时导体的内部区域将不列入求解域。

利用阻抗边界条件计算导体中涡流损耗，可避免导体内部的网格加密，降低计算量，同时又能保证较高的准确性，是工程计算中常用的有效方法[50]，前提条件是趋肤深度相比导体厚度和导体表面曲率半径要足够小。

除阻抗边界条件，能够克服趋肤效应对网格尺寸的要求的方法还有扩展有限元方法、谱元法等。这些方法主要通过构造复杂的单元插值函数在一层单元内描述复杂的场分布特性，从而降低对导体表面区域单元层数的要求。

3.3　开放空间

电磁场计算与固体力学或流体力学计算相比的特殊性在于，在没有屏蔽的情况下电磁场充斥全空间。要对计算区域内的电磁场分布进行准确计算常需要考虑有限计算区域之外的场如何描述，以及如何考虑到求解计算中去。这方面的研究成果综述可参考文献[51-52]等。这里主要讨论几种对建模和网格剖分有较密切关系的方法。

3.3.1　截断法

一般来说电场、磁场的强度随着离场源的距离增加而快速衰减，当选择的计算区域的截断边界足够远，边界以外的场的分布可以认为可以忽略。一般实际仿真中，通常可以选取截断边界到场源中心的距离为器件边界到场源中心的距离的 5 倍左右，即可满足仿真精度要求。

对于准静磁场采用 ***A***-v 形式，根据变分原理，在截断边界 Γ 处自然满足 Neumann 边界条件，即：$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_{\Gamma} = \boldsymbol{n}\times\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}|_{\Gamma} = 0$。也可以在截断边界处施加 Dirichlet 边界，$A_{\mathrm{e}}\big|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow n\cdot\boldsymbol{B}|_{\Gamma} = 0$，其中 A_{e} 表示边自由度。

为了进一步控制计算规模减少网格数目，可以在将空气域分为多个部分。距离器件近的空气部分剖分较密，而较远的部分剖分较稀疏。如果网格剖分工具能够自动控制从器件边界到空气域外边界的网格尺寸增长率，可以更方便地控制计算规模。

3.3.2 对偶法

无穷远边界上同时满足场为零和场的对称性。利用对称场源下场分布的对称性的 SDI (strategic dual image)方法，在截断边界处构造近似满足无穷远边界特性的对偶边界条件，从而给出相对截断边界更准确的计算结果[53]。对于似稳磁场，该方法相当于，首先，令截断边界处满足对称边界条件，即 Neumann 边界条件，得到一组解，这组解在边界上的值为 $A_{\mathrm{e}}^{0}\big|_{\Gamma}$。然后假定 Γ 作为远场边界时场的大小为 Neumann 边界和 Dirichlet 边界的平均值，即 $A_{\mathrm{e}}\big|_{\Gamma}=\frac{1}{2}(A_{\mathrm{e}}^{0}\big|_{\Gamma}+0)$，并对 Neumann 边界下得到的解进行修正。

在 SDI 方法基础上，进一步采用对偶有限元方法应该可以得到更高的精度。对偶有限元方法至少对于静态场从理论上可以给出场能量的上下界[54]。在初始网格和对偶网格上分别求解对偶的场平衡方程，将两次求解结果做平均，可以得到更接近真实解的计算结果[55]。对偶有限元方法可以在一定程度上平抑由于网格疏密导致的离散误差，降低求解器对网格剖分程序的要求。结合 SDI 方法和对偶有限元方法应该能够得到相比 SDI 方法在同样网格下更准确的计算结果。

3.3.3 气泡边界

气泡边界方法通过在求解区域网格的外边界上附加一层特殊的网格单元(super-element)来表征外部空间[56]。这层网格单元需要按如下方法来生成。在求解域内选取一个中心点 O，沿中心点 O 与外边界 Γ_0 每个结点 P 连线(OP)方向，按与连线长度|OP|的某个固定比率 K 的长度 K|OP|外沿出一个新一层边界 Γ_1 的结点 Q。连接 Γ_0 与 Γ_1 上的结点形成气泡边界域 Ω_0 内的网格单元。通过递归的方式，在从 O 点到 K^2|OP|距离处再生成新一层边界 Γ_2 的结点，并按 Ω_0 内结点连接方式形成新一层单元。这种递归方式给出了一种自动向外扩展求解区域网格的方法。也就是说，虽然建模时没有画出足够远的外边界，但可以通过这种方法在截断边界以外不断生成新的单元，直到最外层边界距离场源足够远。然后只要在最外层边界指定场为零的边界条件，就可以将外部空间对求解精度的影响降低到足够小。

求解时，并不一定需要创建出许多层的气泡单元。通过对第 k 层气泡域 Ω_k 应用 Galerkin 方法，得到边界 Γ_{k-1} 与 Γ_k 上结点自由度 $\boldsymbol{v}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{v}_k$ 之间的关系：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{0,0}^{k} & \boldsymbol{M}_{0,1}^{k}\\ \boldsymbol{M}_{1,0}^{k} & \boldsymbol{M}_{1,1}^{k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{k-1}\\ \boldsymbol{v}_{k}\end{bmatrix}=0 \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{M}_{i,j}^{k}$ 是对应的有限元单元积分矩阵。通过 Gauss 消元，并令 $\boldsymbol{v}_k=0$，可以得到 $\boldsymbol{M}_{0,0}\boldsymbol{v}_0=0$ 作为边界条件代入到内部区域的有限元方程中。

3.3.4 映射法

把求解域外的外部区域映射到一个与求解域具有相同外边界形状的有限区域中，并通过网格剖分相关处理使求解区域边界与映射区域边界上的网格连接起来，构成一个完整的无边界的求解区域[57-59]。求解得出的结果通过逆映射重构出外场分布。

其他一些方法：如 Hybrid 方法(FEM-BEM, FEM-Green's function)，渐进边界条件(第三类边界条件)等，以不同方式构建求解域外边界所满足的数值约束条件，进而得到满足远场分布特征的解[52,60]。这些方法不需要对网格的特殊处理，这里就不进一步展开。

对于远场边界的处理方法已有很多研究，但在实际问题的建模仿真中还是有许多相关问题难以完美处理。例如：引线端子的建模问题，变压器、IGBT 等器件都需要引线端子与外电路相连。引线端子的建模在一些情况下(如损耗计算等)不能忽略，但一般不会对外电路建立几何模型。常用的场路耦合计算是通过引线端子外表面的端口与外电路的零维电路拓扑模型相连。这导致在端口表面处电流场不连续。较粗略的建模方法是让端口表面与求解域中空气域外表面相切，在端口所在空气域外表面施加磁场法向分量为零的边界条件。这种建模方法很难在空气域外表面上应用上述的远场边界条件，进而影响求解的准确性。如果端口表面建在空气域内部，电流场的不连续，可能会导致场求解误差增大或不收敛。对于静磁场求解，若求解域无磁性材料，在磁矢量位方程式中可以通过节点单元施加库仑规范放松静磁方程对电流场散度为零的约束，获得较好的求解结果。但这种方法对于其他类型场的求解还缺少一般性。

3.4 变形与运动

由于一般情况下电磁场不受材料边界限制在全空间分布，有限元计算需要对空气域划分网格。机械运动和结构变形可能导致初始划分的网格失效。重新做网格剖分或使用边界元方法考虑空气域

计算效率低，因而能处理的问题规模受限。研究适用于电磁场与机械运动和变形耦合的通用、高效数值计算方法对于相关机电设备的结构设计和优化有重要应用价值。

在电机、电磁弹射等机电能量转换设备中，需要考虑电磁场与运动导体之间的相互作用，导体在磁场中运动产生感应涡流，并受到电磁力的影响改变运动状态。运动状态的改变将导致物面边界发生变化，此外，不合适的离散数值格式可能导致数值解出现“伪振荡”。因此，处理电磁场中的运动问题需要合适的数值离散格式和网格形变方法。

3.4.1　离散数值格式

从离散数值格式的角度，常见的处理导体运动的方法有拉格朗日方法(Lagrange)[61]、欧拉方法(Euler)[62]、有限元-边界元耦合方法[63]。

拉格朗日方法在每一个运动区域上用一套与运动区域相对静止的坐标系来描述导体的运动，速度项反映在运动体的离散网格在每一步的位移中。拉格朗日方法由于对流项不显式地出现在方程中而保证方程组矩阵的对称性，不会存在数值振荡的问题。然而，拉格朗日方法需要有效的技术来处理每个时间步面临的网格错位问题，此外，对于分析稳态运动的问题时，采用拉格朗日方法通常需要经历一个长时间的暂态过程，使得拉格朗日方法面临巨大的计算负担。

对于处理稳态运动的问题时，欧拉方法比拉格朗日方法更可取。使用欧拉方法，运动和静止区域采用同一套坐标系，对流项显式的出现在方程中。欧拉方法不需要对暂态过程进行模拟，也不需要处理运动体网格的重剖分。然而，欧拉方法只适用于电磁结构在运动过程中不发生改变的情况，具有一定的局限性。同时，由于对流项的影响，方程最终的系数矩阵失去了对称性，方程的收敛行为主要由 peclet 数决定[64]，当 peclet 数过大时求解方程可能出现“伪振荡”。引入迎风因子、有限解析单元法或模型降阶方法能够有效地消除数值振荡。

有限元边界元耦合的方法是在物体边界的内部用有限元离散而在外部空气区域用边界元离散，减少了网格剖分的工作量，能够有效解决开放边界问题和运动问题。然而，边界元离散时构造的矩阵是一个稠密矩阵，在内存占用和计算时间上都具有二阶线性复杂度，限制了有限元边界元耦合方法在工程上的应用。使用快速多极子(fast multipole)等方法能够对稠密矩阵做局部稀疏化[65]，从而一定程度上提高有限元边界元耦合方法的计算效率。

3.4.2　网格处理

当采用拉格朗日离散格式时，速度反映在运动体的离散网格在每一步的位移，需要采用合适的网格重构或网格变形技术使计算网格适应物体边界的变化。网格重剖分是最直接的方式，但显著加大了计算负担，且在瞬态场中，重剖分后各节点的位置和个数均可能改变，在对相邻时间步长的场量通过差分求导时，需要采取插值的方式来获得各个节点上相邻时刻的场值，加大计算负担的同时还可能引入额外的误差。采用网格形变技术可以保留原始网格的拓扑结构与密度等特性，在保证网格质量的前提下，不会在求解器中引入额外的误差，同时计算量较小。目前存在多种网格形变方法，根据运动轨迹的特性可以分为运动轨迹受约束的网格形变技术如运动带法[66]、滑移边界法[67]、Mortar 元法[68]和运动轨迹不被约束的网格形变技术如重叠网格法[69]、径向基函数(radial basis function, RBF)方法[70-71]等。

运动带方法广泛应用于旋转电机、直线电机等运动轨迹已知的场景。通过在运动边界上定义一层称为“运动带”的单元，在发生直线运动或转动时，允许运动带内的单元发生一定程度的变形，当变形超过允许范围时，则通过改变节点的链接关系实现运动带内网格的重构，保持系统整体刚度矩阵的结构不变，达到快速处理转动和直线运动的目的。

滑移边界法在运动区域和非运动区域之间分出一条交界线，交界线上运动区域网格和非运动区域网格各有一套相互重叠的节点，取消了运动区域和非运动区域分界线上节点必须一一对齐的约束，通过插值的方式将滑移边界两侧的节点链接起来。

Mortar 元是一种区域分解算法，它将求解区域划分为多个子域，在各个区域以最合适子域特征的方式进行离散。而在运动区域和非运动区域的交界面上通过非协调有限元实现，没有节点匹配的限制，使得 Mortar 元能够非常方便地处理滑动问题。

对于运动轨迹不被约束的情况，通常使用物理类比法[72]、偏微分方程法[73]以及代数插值法[74]等网格形变技术处理物体边界的变化。其中最有代表性的是 RBF 方法。近些年来，由于具备通用性高，鲁棒性强的特性，基于 RBF 的网格变形技术得到了极大的发展与应用。其主要思想是利用已知的物面网

格变形，构造一个 RBF 序列，通过 RBF 插值得到其他空间节点的坐标值。虽然以 RBF 为代表的网格形变技术能够有效的处理物体边界的变化，若物体运动的范围太大，在不进行额外网格剖分的情况下，形变后网格的质量将变差，影响计算精度。这种大变形对于此类网格形变技术是一个挑战。

重叠非匹配网格的方法利用两套网格分别处理静止和运动部分，而用插值、非协调元等手段处理静止部分和运动部分节点的链接关系，可以克服传统一套网格方法在处理任意运动及运动范围较大情况时的困难。文献[75]基于重叠不匹配网格，提出一种新方法，将重叠后单元间侵入边界转变为非侵入不一致网格边界问题，可以避免由侵入边界带来的计算和收敛性难题。该方法具有运动或变形过程中，网格拓扑不变，求解变量自由度不变的优点。

4 多物理场耦合

多物理场协同建模仿真是实现电工装备综合性能设计和分析的关键手段。根据物理场之间的相互关联程度，可采用不同的耦合模式进行求解。多物理场耦合仿真中的一个主要难点是多空间、多时间尺度物理场的处理问题。

4.1 电工装备多物理场耦合建模

电工装备的多物理场主要涉及电、磁、热、力、流体和声场等，也可能包括带电油流等其他物理作用[76-77]。

图 3 描述了多物理场问题的耦合关系，在不同的物理场方程之间通过激励源、材料属性或者几何结构变化产生耦合关联。

图 4 给出了电工装备多物理场分析中主要考虑的物理场和各物理量之间的关系。其中，由电磁场导致的力的作用包括洛伦兹力、材料的磁化受力、磁致伸缩等，电磁损耗包括磁滞损耗、和焦耳损耗等，传热包括流体换热、共轭传热以及辐射传热。

电磁-热、电磁-力耦合计算的精度很大程度上取决于热源(即电磁损耗)和电磁力的计算精度。对于热源来说，导体里的焦耳损耗(含涡流损耗)计算公式相对简单，但其精度取决于电流的计算精度，特别是涡流场趋肤效应较大的时候与网格密度和插值函数阶数紧密相关(见 3.2.1 节)。而磁性材料的磁滞损耗则取决于材料的磁滞建模(见 2.3 节)。

电磁力的计算有各种不同的计算方法。根据电磁材料或结构是否变形需要计算局部分布力或全局力。4.2 节简单介绍一些常用电磁力的计算方法。

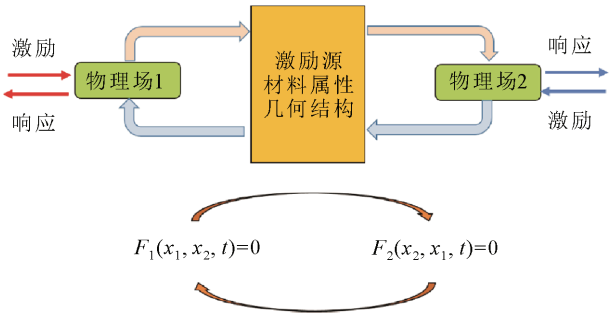


图 3 多物理场耦合关系示意图

Fig.3 Schematic diagram of a multiphysics coupling relationship heterogeneous

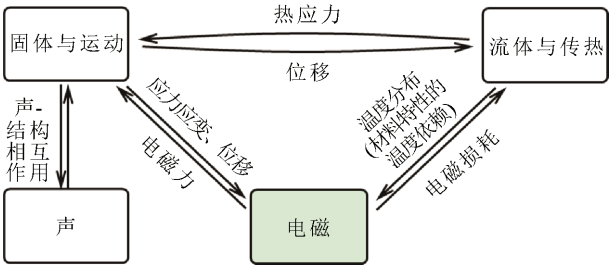


图 4 主要考虑的物理场及各物理量的关系

Fig.4 Multiphysics mainly considered and the relationship between physical quantities

4.2 电磁力计算

对于电磁与机械耦合系统，如果只关心物体的刚体运动则只需计算作用在物体上的全局电磁力。如果需要计算物体的机械变形，则需要计算物体上或材料中的分布电磁力。

作用在带电粒子(自由电荷和自由电流)上的电磁力可以通过洛伦兹力表达式计算，作用在电磁材料中的电磁力则需要考虑材料的极化或磁化。文献中存在许多计算分布电磁力的方法。根据不同的极化或磁化模型(如电偶极矩、磁偶极矩、等效磁荷、等效电流等)，或基于能量守恒的虚功原理，会得到不同的电磁力密度的表达式[78]。以磁场力为例，不同方法导出的磁场力的体密度均可写成下列的表达式：

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}\mathrm{grad}\mu + \boldsymbol{f}'' \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{f}$ 为电磁力的体密度。右端第 1 项是洛伦兹力；第 2 项是非均匀磁性材料导致的磁场力，一般主要集中在不同材料的分界面上；第 3 项 $\boldsymbol{f}''$ 为磁致伸缩力，它同时是磁场和机械应变的函数。不同方法导出的力密度表达式通常只是磁致伸缩力的表达式不同。由于磁致伸缩力在材料微观尺度上与机

械应力相平衡，其宏观尺度上的全局效应为零，因而若仅计算刚体运动则不需考虑。在需要计算磁致伸缩引起的变形时，磁致伸缩力一般由磁场与力场的耦合材料本构特征关系给出，并通过电磁场-力场耦合计算[79]，不需要显式计算。因此式(17)中的磁致伸缩力 $\boldsymbol{f}''$ 在电磁力计算中一般不与考虑。

忽略 $\boldsymbol{f}''$ 项的电磁力式(17)称为磁性材料中的 Korteweg-Helmholtz 力密度。引入二阶张量 $\boldsymbol{T}$，其 ij 分量为：

$$\boldsymbol{T}_{ij}=H_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \tag{18}$$

δ_{ij} 为克罗内克尔符号，可以证明 Korteweg-Helmholtz 力密度可以写成张量 $\boldsymbol{T}$ 的散度：

$$\boldsymbol{f}=\mathrm{div}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{grad}\mu \tag{19}$$

式中：T 称为磁性材料的麦克斯韦应力张量。若只关心作用在体积为 V 的材料上的总力，则可通过高斯定理将力密度的体积分转换为边界 ∂V 上麦克斯韦张量的面积分：

$$\boldsymbol{F}=\int_V\boldsymbol{f}\mathrm{d}V=\int_V\mathrm{div}\boldsymbol{T}\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{20}$$

式(20)即为磁场力计算的麦克斯韦张量法。

需要指出的是，尽管不同的电磁力计算公式在理论上等效，但因为其表达式中同时含有磁场强度的切向分量和磁感应强度的法向分量，因此其计算精度同时取决于这两个场分量的计算精度。在有限元等数值分析中，根据不同的方程式，我们仅能较精确的获取其中一个分量而另一个分量只能通过弱形式获取，因而会导致计算精度上相当大的差异[80]。为了获得更鲁棒的电磁力计算方法，文献[81]提出了将基于能量守恒的虚位移方法应用于有限元网格节点上的局部虚位移方法，用于分布电磁力和全局电磁力的计算。由于磁场能量为磁感应强度和位移变量的函数，磁共能为磁场强度和位移变量的函数，根据不同的有限元方程式，可通过磁能或磁共能对节点位移变量求导，使得计算精度仅取决于磁感应强度的法向分量的精度或磁场强度的切向分量的精度，从而大大改进了电磁力计算的鲁棒性。该方法中，对节点位移变量求导可通过雅可比矩阵的导数完成[82]。

4.3　耦合方法

多物理场耦合模型可通过不同耦合模式分析方法实现，通常包括直接耦合(或同步耦合)分析和迭代耦合(或异步耦合，或交错耦合)分析。直接耦合分析将描述不同物理过程的物理方程联立求解，将不同物理场量之间的依赖关系进行显式离散，对不同物理问题在同一种离散方法和同一个网格下实现，以建立同一个离散方程。直接耦合能够精确描述不同物理过程之间的依赖关系，特别是在压电、磁滞伸缩等具有强非线性多物理场问题的仿真计算中具有独特优势。但其离散代数系统未知数多矩阵大从而使计算复杂度增加，另外耦合代数系统通常在对称性、正定性、条件数等方面性能较差，不利于数值求解的收敛。迭代耦合分析将一个物理过程对另一个物理过程的影响通过网格数据传递的方式转化为另一个物理方程的材料、边界或激励的变化，进而迭代求解多个物理场方程。迭代耦合分析可以方便地复用现有的物理场求解器，可以分别对每个求解器单独采用合适的离散和求解算法，因而也是目前商业软件中支持的主流耦合模式。根据物理场耦合的密切程度，迭代耦合分析从耦合策略上分为单向耦合和双向耦合，单向耦合在每个耦合步骤中只交换一次场量，也称全局显式耦合，双向耦合则发生多次交换直至获得整体稳定解，再进入下一个耦合步骤，也称隐式迭代耦合[83]。界面耦合是迭代耦合的一个特例，是指不同物理场的空间求解区域不同，在空间交界面上实现交互，界面耦合多发生与流体相关仿真分析中。

4.4　不同网格间变量映射处理技术

目前，大多数商业软件都是基于同一套网格进行多物理场耦合。不同物理场的分析可以共享同一套网格模型，在耦合交互过程之中，各种量值的映射与传递可通过直接的、自然的方式提供。

为了更有效地对物理现象实施建模，不同物理场问题需要与之适应的网格(包括网格单元形状和大小，单元阶数)和插值函数(有限元插值函数类型和阶数)，甚至采用不同的自适应网格策略。例如求解电磁装置中的电磁场、流场和温度场的耦合问题时，电磁场计算得到的损耗传递到温度场作为载荷，结合流体散热进行热分析，而电磁场和热-流场在求解时对网格离散要求差别很大，使用同一套网格会导致或者单元数过大影响计算效率，或者单元过少影响计算精度。采用不同的网格模型，无需同时兼顾各物理场对网格形状及剖分的要求，使得建模更为灵活，保证精度的同时提高计算速度。但是，这就造成不同物理场的网格异构，需要在网格空间上进行物理量映射(投影)，同时也引入了映射误差。

因此，在不同网格和离散之间建立物理量的映射关系并保证误差收敛性是多物理协同仿真必须解决的关键问题[84]。

网格映射首先要进行不同网格的匹配，然后在匹配的网格之间选择合适的插值函数或投影方法。映射可以发生在区域内部(体映射)，也可以发生在区域界面处(面映射)。根据插值物理量性质的不同，插值数据分为非守恒量(如位移、速度、温度等耦合界面所传递的数据量总和不相等)以及守恒量(流量等耦合界面传递的数据量总和必须相等)[85-88]。迦辽金投影[86-87]为解决这一问题提供了一种较为完善的理论方法。

网格匹配可采用效率较高的预接触搜索算法，实施插值则常采用直接线性插值、找公共基准点建立映射算法以及基于网格匹配和相邻最近节点的插值。由于计算简便，单元重心等特征点常用作不同网格之间数据传递的方式，但往往会造成较大的数据传递误差。很多学者为此提出多种改进方法，如基于正交投影和线性插值的方法[83]、通过高斯-勒让德积分和坐标变换的方法[89]、结合快速映射和径向基函数的混合算法[90]等。

4.5 不同时间离散下变量映射处理技术

许多情况下，由于不同物理场的时间常数不同因而对激励的时间响应差异很大。如果不同场求解器设置相同的时步，耦合可以直接进行，然而时间步长的设置将直接影响到计算效率或计算精度。如果按时间常数小的物理场设定步长可以保证精度但计算量将大幅增加。如果按时间常数大的物理场设置则无法保证计算精度。因而需要采用不同的时间离散(迭代时步)，或自适应时步策略。这就造成不同物理场的时间异步，需要对物理量在恰当时间点上进行插值或映射(投影)。

理论上，时间映射就是通过定义时间误差范数，使用伽辽金方法等将其最小化[83]。当多种物理场的时间尺度相差很大时(如瞬态场与似稳态场耦合)，并且要在较大时长范围进行分析，需要精心地对其耦合过程进行设计。例如齿轮感应淬火过程分析(见图 5)，其感应电源频率为千赫兹量级，加热时间为秒级，若对电磁场每个电磁周期进行时间离散，并和热场采用同一时步会导致计算效率低下。针对此类问题 EMPbridge 开发了多物理多时间尺度耦合模块，电磁问题在频域计算，将一个电磁周期内的涡流等效发热耦合至热场，按热问题的时间常数设计时间步长进行时域计算，并考虑温度变化对材料参数的影响，从而在保证精度的前提下实现快速耦合仿真。

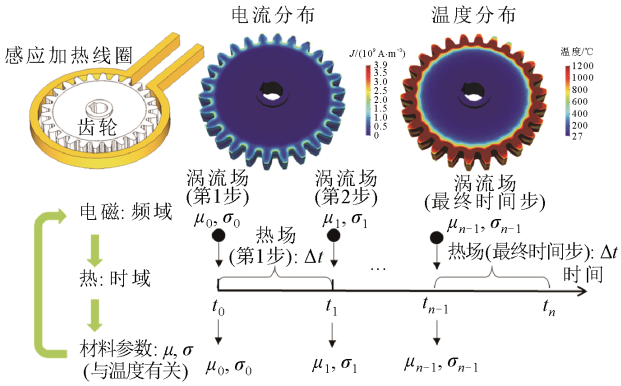


图 5 多时间尺度下电磁-热耦合求解过程示意图

Fig.5 Schematic diagram of the electromagnetic-thermal coupling solution process at multiple time scales

针对 4.4 节讨论的网格间变量映射及本节讨论的不同时间离散下的变量映射，当前已有接口软件专门实现耦合区域和界面异构网格下的场量映射和多物理分析的交互[83,88]，但目前支持的耦合分析还比较有限。无论是从理论角度，还是从工程角度来说，异构网格下时-空场量的保值映射仍是一个难点问题，映射实现方法、求解效率和可靠性仍有很大的提升空间。

5 数字孪生与替代模型

5.1 数字孪生发展历程

数字孪生概念最早于 2002 年 10 月由 Michael Grieves 在美国制造工程协会管理论坛上提出[91]，2009 年由美国空军实验室首次提出数字孪生体(Digital Twin)这一名称[92]。自 2010 起，全球 1000 多个机构、上千名学者开展了关于数字孪生的研究，形成众多专著、工业解决方案[93]，各组织形成的数字孪生平台如图 6 所示。

5.2 数字孪生模型与内容

数字孪生的优势在于提供询问和预测价值。构建数字孪生模型与数字孪生体是发挥数字孪生价值的基础，为此 Michael Grieves 给出了数字孪生模型的通用构成，即“包含(但不限于)完全注释的 3D 模型、组件的材料清单、测量结果、服务清单、过程清单等，一个数字孪生模型可能会由多个不同角度的组件聚合而成”。以人体构成为例来理解数字孪生模型可能是最为直观的。其中，3D 模型和材料清单

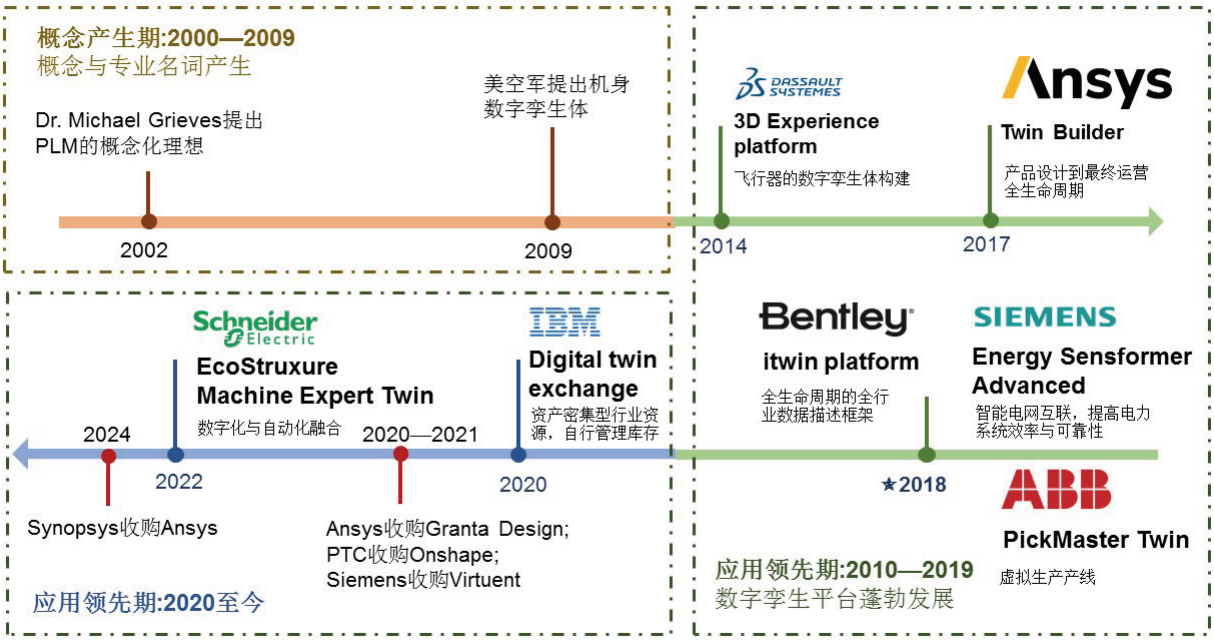


图 6　数字孪生平台发展历程

Fig.6　Development of digital twins

可以用于形成一个静态的人体；测量结果可以反映人体的各种测量数据；服务清单则表征了人体所能执行的各种工作。过程清单则是数字孪生模型的核心，代表了人体的整个生命过程，其实现需要依赖算法来驱动孪生模型与物理实体同步运行。

理想的数字孪生体应该具备 3 个特征。首先，不仅可以在设计阶段模拟产品或设备的特性，还可以在产品或设备使用或运行过程中实时获取和展示产品状态。产品或设备在生产阶段会因为种种原因与设计产生偏差，也会在运行阶段由于使用和操作方式以及环境影响等在老化、故障等方面发生变化，这就要求数字孪生体能跟踪实体的整个变化过程。因此，数字孪生需要具备的第二个特征就是实时性，可以实时获取数据，实时分析和实时决策。最后，数字孪生体应该具有定制化的特征，即使是量产的实体，在实际使用的过程中，状态也不尽相同，数字孪生体应体现相应的个性化差异。图 7 为中介绍数字孪生体在产品全生命周期管理中各阶段应发挥的作用。

根据数字孪生提出者 Grieves 对数字孪生模型的定义，以电力变压器为对象，变压器数字孪生模型应当包含：几何模型、材料模型、数据模型、仿真模型、驱动方法这 5 项要素，如图 7 所示。

数值建模仿真是数字孪生体构建的关键要素[94-95]。

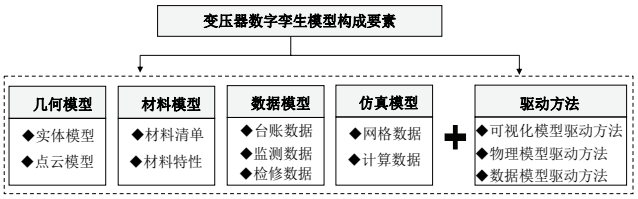


图 7　变压器数字孪生模型构成要素

Fig.7　Elements of the digital twins model for transformers

如图 8 所示：设计阶段需要进行迭代仿真，在设计空间中进行寻优，满足产品设计性能；运行阶段则需要满足实时仿真需求，对实体运行状态下的物理量进行实时求解和评估。由于计算成本过高，传统数值方法难以满足高效迭代仿真和实时仿真的需求。替代模型/元模型(surrogate model/meta model)技术是实现这两个需求的关键途径，替代模型可以由物理模型和数据共同驱动，同时满足物理模型的高保真度和数据模型的预测效率。为达到替代模型提高仿真速度的同时尽可能不失精度这一目标，基于投影的模型降阶方法是一类重要的技术手段。

基于投影的模型降阶方法建立在参数化偏微分方程的解空间可以用一个低维流形来描述这一假设基础上，其核心思想是寻找这一低维流形的一组基底，并将原始问题投影到这一低维流形上实现降阶。常见的方法有本征正交分解 POD(proper or-

thogonal decomposition)[96-97]，缩减基法 RBM (reduced basis method)[98]，广义本征分解 PGD (proper generalized decomposition)[99-100]，考尔梯形网络 CLN (Cauer ladder network)[101]，渐近波形计算 AWE(asymptotic waveform evaluation)[102]等。降阶基底的生成方法可以分为“后验”和“先验”两类。“后验”的基底获取方法需要在参数空间进行少量采样及全模型的求解，得到一系列“切片解”，通过这些切片解生成降阶基底，广泛应用的 POD 方法即是利用这种方式获取降阶基底。“先验”方法以 PGD 为代表，这类方法跳过“采样”这一步骤，从参数空间中一个初始解向量出发，通过“基底丰富(basis enrichment)”的迭代过程在残差空间中搜索并补充新的基底。

近年来，电气工程领域在基于模型降阶及数据驱动的替代建模方面的一些相关工作包括：参文[103]基于 PGD 进行永磁同步电机动态高精度建模，得到的模型计算速度远远超过传统有限元方法；参文[104]对感应电机不同静态偏心水平下的等效电感通过基于分层拉格朗日插值方法和有限元分析进行了建模，以实现实时的偏心故障诊断；参文[105]在 EMPbridge 仿真平台下基于 POD 及响应面法建立了永磁同步电机实时仿真模型，可实现负载突变下的高精度实时计算，分析流程见图 9。

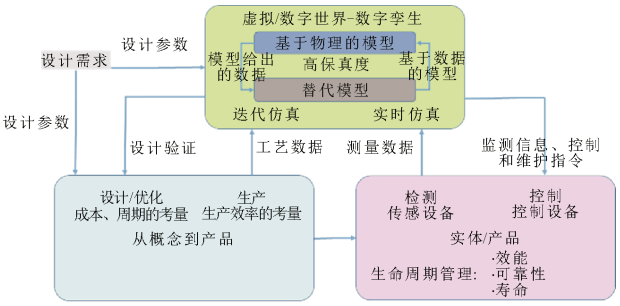


图 8 数字孪生体与产品全生命周期管理

Fig.8 Digital twins and the full product lifecycle management

6 发展趋势和展望

计算电磁学学科的发展与工业的发展需求始终紧密相关，也由工业需求不断驱动。当前，面向智能制造及数字孪生等前沿需求，不断融合新兴前沿计算技术，实现计算精度和速度的平衡是学科发展的终极目标。

在多物理协同设计和新型复合材料建模等需求的牵引下，前文讨论的多尺度多物理耦合建模仿真方法仍是电磁场计算领域的研究重点。此外，基于并行计算、云计算及硬件加速等技术的高性能计算也是重要的学科发展方向[106-108]。如第 5 章所述，近年来，面向产品全生命周期管理，构建数字孪生体，实现设备运行状态的实时仿真、预测和决策，是电磁建模仿真领域发展的一个重要的机遇和挑战。

除此之外，本章将就以下几个重要发展趋势展开讨论：1）面向智能制造，将数值计算和优化算法进行高效融合，提高优化设计效率，缩短设计周期；2）人工智能在建模仿真中的应用以及与传统数值方

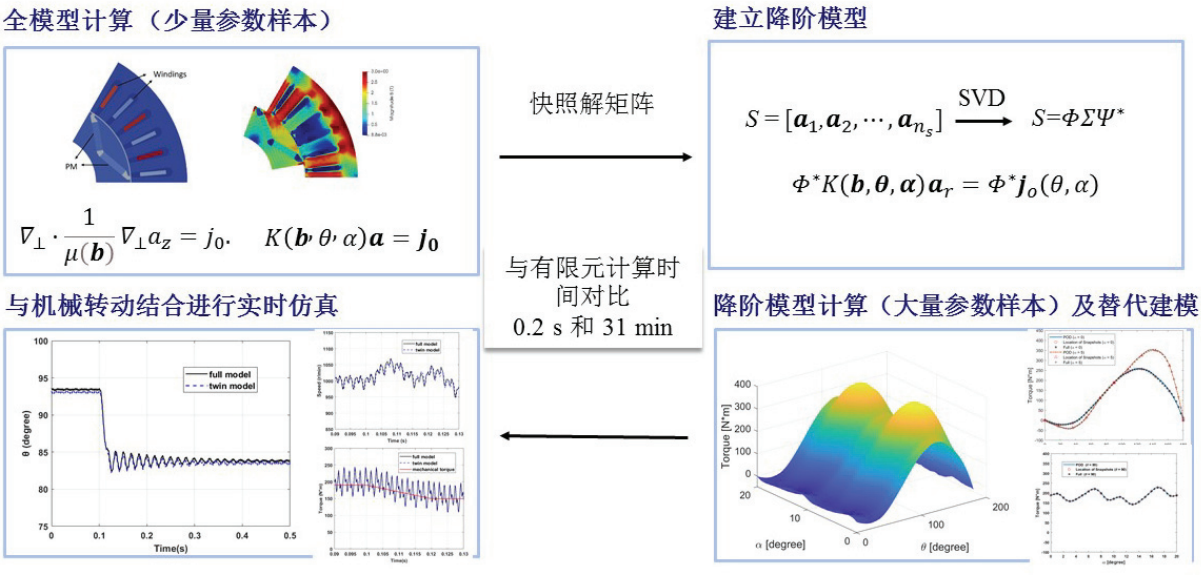


图 9 永磁同步电机实时仿真建模，基于 EMPbridge 仿真平台实现

Fig.9 Real-time simulation modelling of permanent magnet synchronous motor, implemented based on the EMPbridge simulation platform

法的融合；3）新一代仿真软件。

6.1　优化设计

优化设计自 20 世纪 80 年代起已成为计算电磁领域的一个重要研究方向。当前，随着电气设备设计的集成化、复杂化、精细化，自动化设计的需求愈发迫切，工业界的需求也逐渐由单器件、单物理场的优化设计发展为器件系统、多物理场的协同优化。优化即针对设计目标，在设计空间中寻求使目标函数达到最优值的设计点的过程，需结合优化算法，在设计空间中对物理方程进行多次迭代求解。根据设计空间的不同，优化设计可以分为尺寸优化、形状优化和拓扑优化几个层次。当前，拓扑优化作为衍生式设计的一种重要手段，是优化设计理论发展的热点方向[109]。此外，鲁棒优化是智能制造背景下备受关注的优化设计理论，它结合不确定性分析，考虑生产工艺及产品运行参数的不确定性，将质量控制、良率控制和生产管理作为优化目标或约束融入到优化设计过程中[110]。

拓扑优化和鲁棒优化等先进优化设计理论涉及更高维度的设计空间，与传统数值方法结合进行迭代求解计算量巨大。因此，在优化迭代过程中采用数据驱动的替代模型成为实现高效优化设计的必由之路，近年来，在机器学习、克里金法(Kriging)、径向基函数等高维数据插值/拟合技术与前沿优化算法结合方面的一些代表性研究工作包括：参文[111]将卷积神经网络与非支配排序遗传算法结合应用于电磁制动器的多目标拓扑优化；参文[112]提出结合深度神经网络的迁移学习来降低电机拓扑优化的计算成本；参文[113]结合克里金方法进行设计空间压缩，开展电机的鲁棒优化；参文[114]提出了一种基于自主在线学习的拓扑优化(self-directed online learning optimization, SOLO)方法，结合深度神经网络(DNN)和启发式优化算法，在优化过程中根据当前 DNN 对最优设计的预测，得到更接近最优方案的设计点。

6.2　人工智能

与人工智能的融合是当前数值仿真领域备受关注的重要课题[115]。一方面，数值仿真可以为人工智能提供可靠的仿真数据，提高人工智能的预测精度[116]；另一方面，人工智能可以用来提高数值仿真的效率，如 6.1 节及第 5 章所述，基于人工智能的替代模型可以服务于高效优化设计以及数字孪生体的构建。除此之外，如 2.3 节所述，人工智能在材料建模中的应用也是一个重要方向，相关数据模型可嵌入到数值仿真算法中实现求解。

由于人工智能的训练往往需要大量数据，这些数据可以来自传感测量数据或仿真数据。测量数据的获取依赖于实验条件，一些极端工况的测量数据面临获取难度大、代价高的问题。数值仿真可模拟实验测量难以实现的设备运行状态，用于生成或完善人工智能模型的训练集。用传统数值仿真获取数据的计算成本较高，近年来出现了另一种研究思路，即直接用人工智能替代数值方法来求解偏微分方程。这一思想最早由 Rassi 在 2018 年提出[117]，称为基于物理信息的神经网络(physics-informed neural network, PINN)。PINN 将物理约束嵌入到神经网络训练中，无需准备标签数据(即非监督学习)，可通过方程定义直接获得样本，开展训练，最终得到偏微分方程的近似解。图 10 给出了 PINN 用于一维偏微分方程求解的原理图。PINN 应用于麦克斯韦方程组及相关多物理问题求解的部分近期工作包括：参文[118-120]分别在二维静电场和静磁场问题中应用 PINN 进行求解，探索了这一算法的可行性；参文[121]初步研究了电热多物理耦合问题的 PINN 学习框架；参文[122]提出采用超网络(hypernetworks, HNN)与 PINN 结合进行参数化问题和反问题的快速求解，其输入为参数变量，输出为 PINN 网络权重和偏置。总之，目前 PINN 距工程化应用还有较大距离，主要的瓶颈包括在参数化问题中的应用、神经网络超参数的确定、训练网络的计算成本以及涉及复杂几何和介质时网络预测的精确性问题。

6.3　新一代工业 CAE 仿真软件

工业 CAE 仿真软件凝集了数值仿真相关工程、数学、物理、计算机等学科知识，使其具有复用性，对智能制造具有关键基础支撑作用。随着计算技术和工业智能化的进步，仿真软件也在不断更迭。当

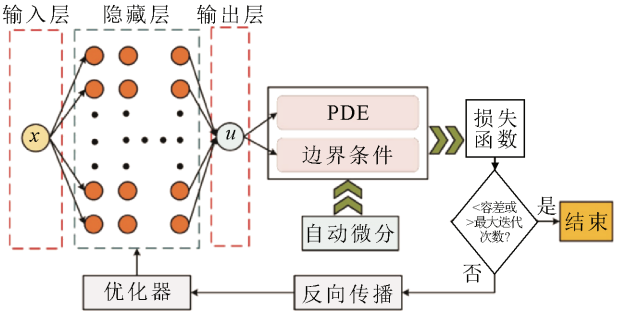


图 10　PINN 求解一维 PDE 的原理图[118]

Fig.10　Schematic diagram of PINN solving one-dimensional PDE[118]

前，仿真软件的发展趋势主要包括下面几个方面：

1）人工智能技术的嵌入。如 6.2 节所述，当前人工智能赋能的仿真技术是一个热点的研究课题，同样也是仿真软件发展的一个重要方向。

2）轻量化及定制化。针对工业各细分行业需求，定制化的专用工业 APP 具有轻量化、高灵活性、易用性强等特征，更易于快速吸纳工业知识，满足专用仿真需求。

3）云端仿真。基于云端仿真平台，仿真流程可以在 Web 浏览器实现，避免了软件的本地安装和更新，提高了用户的自由性和协作性。当前，云端仿真的代表性产品是德国的 Simscale。

4）工具链和分析流程的整合。当前国际工业软件巨头达索、西门子等均进行了大量的收购，打造跨学科一体化仿真平台，如达索开发的 Experience 3D。2024 年初，电子设计自动化(EDA)软件公司 Synopsys 对仿真软件巨头 Ansys 的收购，可以看作是工业软件工具链整合和集成化趋势下的一个标志性事件。除了多学科的集成和整合，不同层级之间仿真工具的集成化也是一个重要发展趋势，如针对数字孪生需求，将有限元分析软件和基于模型的系统工程(MBSE)的系统仿真工具进行整合，相关代表性产品是 Ansys Twin Builder。

7 结论

本文就低频电磁场计算领域中材料建模、网格和离散格式的特殊性、多物理耦合等关键问题的研究现状进行了综述，并就学科发展的几个重要趋势开展了分析。

1）在多物理协同设计和新型复合材料建模等需求的牵引下，多尺度多物理耦合建模仿真方法仍是电磁场计算领域的研究重点。

2）随着工业自动化数字化智能化的发展，传统数值仿真与新兴计算技术、人工智能的结合愈加紧密。

3）在智能制造和数字孪生等前沿需求下，电磁场计算面临高效迭代仿真和实时仿真的挑战，由物理模型和数据共同驱动的替代建模是解决这两方面挑战的重要手段。

4）工业 CAE 软件作为仿真技术的载体，其功能不断在深度和广度扩展，架构也在发生着深刻变革。

当前，我国自主 CAE 软件的落后现状对计算电磁领域前沿算法的研究及工业制造的定制化应用需求造成了一定的制约。我国自主 CAE 仿真软件近年来有一定发展，但在市场占有率、研发生态等方面与国际主流软件差距仍然悬殊，迫切需要夯实核心技术、紧密结合工业应用、建设良性研发生态，助力我国工业制造的智能化和自主化水平的提升。

参考文献 References

[1] TURNER M J, CLOUGH R W, MARTIN H C, et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures[J]. Journal of Aeronautical Science, 1956, 23(9): 805-823.

[2] COURANT R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1943, 49(1): 1-23.

[3] CLOUGH R W. The finite element method in plan stress analysis[C]// Proceedings of 2nd ASCE Conference in Electronic Computation. Pittsburgh, PA, USA: ASCE, 1960: 345-378.

[4] SILVESTER P, Chari M V K. Finite element solution of saturable magnetic field problems[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1970, 89(7): 1642-1651.

[5] RAVIAR P A, Thomas J M. A mixed finite element method for 2^{nd} order elliptic problems[C]// Mathematical Aspect of Finite Element Methods. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer, 1977: 292-315.

[6] NEDELEC J C. Mixed finite element in R^3[J]. Numerische Mathematik, 1980, 35(3): 315-341.

[7] BOSSAVIT A, VERITE J C. A mixed FEM-BIEM method to solve 3-D eddy-current problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1982, 18(2): 431-435.

[8] BOSSAVIT A. Whitney forms: a class of finite elements for three dimensional computations in electromagnetism[J]. IEE Proceedings A, 1988, 135(8): 493-500.

[9] ZHU J F, JIAO D. A rigorous solution to the low-frequency breakdown in full-wave finite-element-based analysis of general problems involving inhomogeneous lossless/lossy dielectrics and nonideal conductors[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2011, 59(12): 3294-3306.

[10] ELLER M, REITZINGER S, SCHÖPS S, et al. A symmetric low-frequency stable broadband Maxwell formulation for industrial applications[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2017, 39(4): B703-B731.

[11] REN Z X. T-Ω formulation for eddy-current problems in multiply connected regions[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2002, 38(2): 557-560.

[12] REN Z X. Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1996, 32(3): 655-658.

[13] FEDDI M E, REN Z, RAZEK A, et al. Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structures[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1997, 33(2): 1382-1385.

[14] TALLEB H, DO T A, GENSBITTEL A, et al. Modeling of multiferroic nanoparticle composites with an analytical multiscale approach[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2020, 56(1): 1-4.

[15] DO T A, TALLEB H, GENSBITTEL A, et al. 3-D finite element analysis of magnetoelectric composites accounting for material nonlinearity and eddy currents[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2019, 55(10): 1-8.

[16] JAEWOOK L, TSUYOSHI N, ERCAN M, et al. Asymptotic homogenization of magnetic composite for controllable permanent magnet[J]. Composites Part B: Engineering, 2019, 161(1): 128-140.

[17] GYSELINCK J, SABARIEGO R V, DULAR P. A nonlinear time-domain homogenization technique for laminated iron cores in three-dimensional finite-element models[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(4): 763-766.

[18] OTOMO Y, IGARASHI H, SANO H, et al. Analysis of Litz wire losses using homogenization-based FEM[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2021, 57(8): 1-9.

[19] SMOLKA J, BÍRÓ O, NOWAK A J. Numerical simulation and experimental validation of coupled flow, heat transfer and electromagnetic problems in electrical transformers[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2009, 16(3): 319-355.
[20] 张长庚. 电工软磁材料三维磁特性测量及耦合磁滞和各向异性的电磁有限元模拟[D]. 天津：河北工业大学，2016.
ZHANG Changgeng. Measurement of three-dimensional magnetic properties of electrical soft magnetic materials and electromagnetic finite element simulation of coupled hysteresis and anisotropy[D]. Tianjin, China: Hebei University of Technology, 2016.
[21] CHENG Z, TAKAHASHI N, FORGHANI B. Modeling and application of electromagnetic and thermal field in electrical engineering[M]. New York, USA: Springer, 2020: 74-112, 569-572.
[22] PREISACH F. Über die magnetische nachwirkung[J]. Zeitschrift für Physik 1935, 94(5/6): 277-302.
[23] MÖRÉE G. Review of hysteresis models for magnetic materials[J]. Energies, 2023, 16(9): 3908.
[24] JILES D C, ATHERTON D L. Theory of the magnetisation process in ferromagnets and its application to the magnetomechanical effect[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 17(6): 2491-2491.
[25] JILES D C, ATHERTON D L. Theory of ferromagnetic hysteresis[J]. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1986, 61(1): 48-60.
[26] JILES D C, THOELKE J B, DEVINE M K. Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1992, 28(1): 27-35.
[27] TELLINEN J. A simple scalar model for magnetic hysteresis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1998, 34(4): 2200-2206.
[28] STONER E C, WOLHFARTH E P. A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1991, 27(4): 3475-3518.
[29] ENOKIZONO M, SODA N. Direct magnetic loss analysis by FEM considering vector magnetic properties[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1998, 34(5): 3008-3011.
[30] CHUA L, STROMSMOE K. Lumped-circuit models for nonlinear inductors exhibiting hysteresis loops[J]. IEEE Transactions on Circuit Theory, 1970, 17(4): 564-574.
[31] JILES D C. Frequency dependence of hysteresis curves in conducting magnetic materials[J]. Journal of Applied Physics, 1994, 76(10): 5849-5855.
[32] CHWASTEK K. Modeling of dynamic hysteresis loops using the Jiles-Atherton approach[J]. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 2009, 15(1): 95-105.
[33] LEITE J V, BENABOU A, SADOWSKI N. Accurate minor loops calculation with a modified Jiles–Atherton hysteresis model[J]. COMPEL-the International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 2009, 28(3): 741-749.
[34] WEI Y, YANG X, CHEN Y, et al. Prediction of magnetic losses in giant magnetostrictive materials under different sinusoidal excitation magnetic fields[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2022, 58(11): 1-9.
[35] GUO W P, LIU D T, WANG W. Neural network hysteresis modeling with an improved Preisach model for piezoelectric actuators[J]. Engineering Computations, 2012, 29(3): 248-259.
[36] PERKKIO L, UPADHAYA B, HANNUKAINEN A, et al. Stable adaptive method to solve FEM coupled with Jiles–Atherton hysteresis model[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(2): 1-8.
[37] SAITZ J. Newton-Raphson method and fixed-point technique in finite element computation of magnetic field problems in media with hysteresis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1999, 35(3): 1398-1401.
[38] LEDERER D, KOST A. Modeling of nonlinear material using a complex effective reluctivity[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1998, 34(5): 3060-3063.
[39] MURAMATSU K, TAKAHASHI N, NAKATA T, et al. 3-D time-periodic finite element analysis of magnetic field in non-oriented materials taking into account hysteresis characteristics[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1997, 33(2): 1584-1587.
[40] VUOKILA N, CUNNING C, ZHANG J, et al. The application of neural networks to the modeling of magnetic hysteresis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2024, 60(3): 1-4.
[41] GALETZKA A, LOUKREZIS D, GERSEM H D. Data-driven solvers for strongly nonlinear material response[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2021, 122(6): 1538-1562.
[42] TALLEB H, REN Z X. Multiphysics modeling of thin-layer magneto-electric laminate composites using shell element[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2016, 52(3): 1-4.
[43] SABARIEGO R V, GEUZAINE C, DULAR P, et al. Nonlinear time-domain finite-element modeling of thin electromagnetic shells[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2009, 45(3): 976-979.
[44] 齐　磊，崔　翔，李慧奇. 变电站接地网的频域有限元方法[J]. 中国电机工程学报，2007，27(6)：62-66.
QI Lei, CUI Xiang, LI Huiqi. Frequency domain finite element method for substation grounding network[J]. Journal of Chinese Electrical Engineering Science, 2007, 27(6): 62-66.
[45] BERNARD L, MAILHÉ B J, SADOWSKI N, et al. Multiscale approaches for magneto-elasticity in device simulation[J]. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2019, 487, Article 165241: 1-13.
[46] LIU Z Y, ZHU J G, ZHU L H. Accurate calculation of eddy current loss in Litz-wired high-frequency transformer windings[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(11): 1-5.
[47] 颜威利，杨庆新，汪友华，等. 电气工程电磁场数值分析[M]. 北京：机械工业出版社，2006：170.
YAN Weili, YANG Qingxin, WANG Youhua, et al. Numerical analysis of electromagnetic fields in electrical engineering[M]. Beijing, China: China Machine Press, 2006: 170.
[48] ADAMIAK K, DAWSON G E, EASTHAM A R. Application of impedance boundary conditions in finite element analysis of linear motors[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1991, 27(6): 5193–5195.
[49] YUFEREV S V, IDA N. Surface impedance boundary conditions: a comprehensive approach[M]. Boca Raton, USA: CRC Press, 2018: 1-25.
[50] 赵志刚，温　涛. 变压器杂散损耗计算中的局部表面阻抗建模方法[J]. 电工技术学报，2020，35(22)：4699-4708.
ZHAO Zhigang, WEN Tao. Local surface impedance modeling method in transformer stray loss calculation[J]. Journal of Electrical Engineering Technology, 2020, 35(22): 4699-4708.
[51] LOWTHER D A, FREEMAN E M, FORGHANI B. A sparse matrix open boundary method for finite element analysis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1989, 25(4): 2810-2812.
[52] CHEN Q, KONRAD A. A review of finite element open boundary techniques for static and quasi-static electromagnetic field problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1997, 33(1): 663-676.
[53] SAITO Y, TAKAHASHI K, HAYANO S. Finite element solution of open boundary magnetic field problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1987, 23(5): 3569-3571.
[54] HAMMOND P, TSIBOUKIS T D. Dual finite-element calculations for static electric and magnetic fields[J]. IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews), 1983, 130(3): 105-111.
[55] REN Z. On the complementarity of dual formulations on dual meshes[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2009, 45(3): 1284-1287.
[56] SILVESTER P P, LOWTHER D A, CARPENTER C J, et al. Exterior finite elements for 2-dimensional field problems with open boundaries[J]. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 1977, 124(12): 1267-1270.
[57] NATH B, JAMSHIDI J. The w-plane finite element method for the solution of scalar field problems in two dimensions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980, 15(3): 361-379.
[58] FREEMAN E M, LOWTHER D A. A novel mapping technique for open boundary finite element solutions to Poisson's equation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1988, 24(6): 2934-2936.
[59] IMHOFF J F, MEUNIER G, SABONNADIERE J C. Finite element modeling of open boundary problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1990, 26(2): 588-591.
[60] REN Z, BOUILLAULT F, RAZEK A, et al. Comparison of different boundary integral formulations when coupled with finite elements in three dimensions[J]. IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews),

1988, 135(8): 501-507.
[61] REN Z, RAZEK A. A strong coupled model for analyzing dynamic behaviors of non-linear electromechanical systems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1994, 30(5): 3252-3255.
[62] RODGER D, LEONARD P J, KARAGULER T. An optimal formulation for 3D moving conductor eddy current problems with smooth rotors[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1990, 26(5): 2359-2363.
[63] 刘守豹，阮江军，张 宇，等. 有限元–边界元耦合法在运动导体涡流场中的应用[J]. 中国电机工程学报，2010，30(9)：123-128.
LIU Shoumao, RUAN Jiangjun, ZHANG Yu, et al. Application of finite element boundary element coupling method in eddy current field of moving conductors[J]. Proceeding of the CSEE, 2010, 30(9): 123-128.
[64] TAN S, LU J, LI B, et al. A new finite-element method to deal with motion problem of electromagnetic rail launcher[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2017, 45(7): 1374-1379.
[65] ZHANG N, YAN S, REN Z. A hybrid iterative-direct solver based on fast multipole method for efficient finite element-boundary element coupling analysis[C]// 2022 IEEE 20th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC). Denver, USA: IEEE, 2022: 1-2.
[66] DAVAT B, REN Z, LAJOIE M. The movement in field modeling[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1985, 21(6): 2296-2298.
[67] 金志颖，杨仕友，倪光正，等. EMS 型磁悬浮列车电磁系统动态电磁场的有限元分析及其悬浮与牵引力特性的研究[J]. 中国电机工程学报，2004，24(10)：133-137.
JIN Zhiying, YANG Shiyou, NI Guangzheng, et al. A time-stepping FEM for transient electromagnetic field analysis and levitation and propellant force study of an EMS maglev train[J]. Proceeding of the CSEE, 2004, 24(10): 133-137.
[68] BERNARDI C, MADAY Y, PATERA A T. A new nonconforming approach to domain de-composition: the mortar element method[C]// BREZIS H, LIONS J L (eds). Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, College de France Seminar XI. Pitman, London: [s.n.], 1994: 13-51.
[69] PENG Y, RUAN J J, ZHANG Y, et al. A composite grid method for moving conductor eddy-current problem[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2007, 43(7): 3259-3265.
[70] BOER A, SCHOOT M S, BIJL H. Mesh deformation based on radial basis function interpolation[J]. Computers & Structures, 2007, 85(11/12/13/14): 784-795.
[71] HENNERON T, PIERQUIN A, CLENET S. Mesh deformation based on radial basis function interpolation applied to low-frequency electromagnetic problem[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2019, 55(6): 1-4.
[72] YANG Y, ZGEN S, KIM H. Improvement in the spring analogy mesh deformation method through the cell-center concept[J]. Aerospace Science and Technology, 2021, 115(11/12): 106832.
[73] HELENBROOK B T. Mesh deformation using the biharmonic operator[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 56(7): 1007-1021.
[74] LIU X, QIN N, XIA H. Fast dynamic grid deformation based on Delaunay graph mapping[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 211(2): 405-423.
[75] 陈志福，闫 帅，张 宁，等. 一种基于重叠网格运动边界重构的运动电磁场计算方法：中国，202011594984.2[P]. 2021-04-09.
CHEN Zhifu, YAN Shuai, ZHANG Ning, et al. A method of motional electromagnetic field calculation based on overlapping mesh boundary reconstruction: China, 202011594984.2[P]. 2021-04-09.
[76] 李立涅，饶 宏，董旭柱，等. 计算高电压工程学的思考与展望[J]. 高电压技术，2018，44(11)：3441-3453.
LI Licheng, RAO Hong, DONG Xuzhu, et al. Prospect of computational high voltage engineering[J]. High Voltage Engineering, 2018, 44(11): 3441-3453.
[77] 杨 帆，张相杰，王鹏博，等. 特高压并联电抗器铁芯振动及噪声特征研究[J]. 高电压技术，2024，50(2)：725-736.
YANG Fan, ZHANG Xiangjie, WANG Pengbo, et al. Research on the vibration and noise characteristics of the iron core of ultra-high voltage parallel reactors[J]. High Voltage Engineering, 2014, 50(2): 725-736.
[78] MELCHER J R. Continuum electromechanics[M]. Cambridge, USA: Massachusetts Institute of Technology Press, 1981: 3.1-3.26.
[79] TALLEB H, REN Z. Finite element modeling of magnetoelectric laminate composites in considering nonlinear and load effects for energy harvesting[J]. Journal of Alloys and Compounds, 2014, 615: 65-74.
[80] REN Z. Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1994, 30(5): 3471-3474.
[81] REN Z, RAZEK A. Local force computation in deformable bodies using edge elements[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1992, 28(2): 1212-1215.
[82] COULOMB J L. A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1983, 19(6): 2514-2519.
[83] WOLF K, BAYRASY P, BRODBECK C, et al. MpCCI: Neutral interfaces for multiphysics simulations[M]. New York, USA: Springer, 2017: 135-151.
[84] ALAUZET F, MEHRENBERGER M, P1-conservative solution interpolation on unstructured triangular meshes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 84(3): 1552–1588.
[85] BUNGARTZ H J, LINDNER F, GATZHAMMER B, et al. PreCICE -a fully parallel library for multi-physics surface coupling[J]. Computers & Fluids, 2016, 141(15): 250-258.
[86] FARRELL P E, MADDISON J R. Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(1/2/3/4): 89-100.
[87] BOER DE A, ZUIJLEN VAN A H, BIJL H. Review of coupling methods for non-matching meshes[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(8): 1515-1525.
[88] GATZHAMMER B, MEHL M, NECKEL T. A coupling environment for partitioned multiphysics simulations applied to fluid-structure interaction scenarios[J]. Procedia Computer Science, 2010, 1(1): 681-689.
[89] 张宇娇，秦威南，刘东圆，等，面向电磁装置磁-热耦合分析的异型网格映射方法[J]. 电工技术学报，2016，31(13)：141-148.
ZHANG Yujiao, QIN Weinan, LIU Dongyuan, et al. A irregular grid mapping method for magnetic thermal coupling analysis of electromagnetic devices[J]. Transaction of China Electrotechnical Society, 2016, 31(13): 141-148.
[90] 刘 刚，张瀚方，池 骋，等. 二维电磁场-流体-温度场耦合仿真节点数据映射算法研究[J]. 电工技术学报，2018，33(1)：148-157.
LIU Gang, ZHANG Hanfang, CHI Cheng, et al. Research on node data mapping algorithm for coupled simulation of 2D electromagnetic field fluid temperature field[J]. Transaction of China Electrotechnical Society, 2018, 33(1): 148-157.
[91] GRIEVES M W. Virtually intelligent product systems: digital and physical twins[C]//FLUMERFELT S, SCHWARTZ G K, DIMITRI M, et al (eds). Complex Systems Engineering: Theory and Practice, American Institute of Aeronautics and Astronautics. Portland; [s.n.], 2019: 175-200.
[92] GLAESSGEN E, STARGEL D. The digital twin paradigm for future NASA and U. S. air force vehicles[C] // 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Hawaii, USA: AIAA, 2012, 1818: 1-14.
[93] 陶 飞，张 贺，戚庆林，等.数字孪生十问:分析与思考[J]. 计算机集成制造系统，2020，26(1)：1-17.
TAO Fei, ZHANG He, QI Qinglin, et al. Ten questions towards digital twin: analysis and thinking[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2020, 26(1): 1-17.
[94] TAO F, XIAO B, QI Q L, et al. Digital twin modeling[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2022, 64: 372-389.
[95] BILLER B, JIANG X, YI J, et al. Simulation: the critical technology in digital twin development[C]// 2022 Winter Simulation Conference (WSC). Singapore: IEEE, 2022: 1340-1355.
[96] RATHINAM M, PETZOLD L R. A new look at proper orthogonal decomposition[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2003, 41(5): 1893-1925.

[97] HENNERON T, CLENET S. Model-order reduction of multiple-input non-linear systems based on POD and DEI methods[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(3): 1-4.
[98] HESTHAVEN J S, ROZZA G, STAMM B. Certified reduced basis methods for parametrized partial differential equations[M]. Basel, Switzerland: Springer, 2016: 13-22.
[99] CHINESTA F, CUETO E. PGD-based modeling of materials, structures and processes[M]. New York, USA: Springer, 2014: 15-35.
[100] YAN S, XU X, LYU P, et al. Application of POD and PGD for efficient parameter sweeping in frequency-domain full-wave problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2020, 56(2): 1-4.
[101] KAMEARI A, EBRAHIMI H, SUGAHARA K, et al. Cauer ladder network representation of eddy-current fields for model order reduction using finite-element method[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(3): 1-4.
[102] PILLAGE L T, ROHRER R A. Asymptotic waveform evaluation for timing analysis[J]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2002, 9(4): 352-366.
[103] MONTIER L, HENNERON T, CLÉNET S, et al. Proper generalized decomposition applied on a rotating electrical machine[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(3): 1-4.
[104] SAPENA A, CHINESTA F, PUCHE R, et al. Model reduction based on sparse identification techniques for induction machines: towards the real time and accuracy-guaranteed simulation of faulty induction machines[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2021, 125, Article number 106417: 1-11.
[105] GUO Z, YAN S, XU X, et al. Twin-Model Based on Model Order Reduction for Rotating Motors[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2022, 58(9): 1-4.
[106] MENG H T, NIE B L, WONG S, et al. GPU accelerated finite-element computation for electromagnetic analysis[J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2014, 56(2): 39-62.
[107] 杨　帆，郝翰学，王鹏博，等. 电力装备多物理场数值计算发展现状[J]. 高电压技术，2023，49(6)：2348-2364.
YANG Fan, HAO Hanxue, WANG Pengbo, et al. Current status of numerical calculation of multi-physics fields in power equipment[J]. High Voltage Engineering, 2023, 49(6): 2348-2364.
[108] 阮江军，张　宇，张宇娇，等. 电气设备电磁多物理场数值仿真研究与应用[J]. 高电压技术，2020，46(3)：739-756.
RUAN Jiangjun, ZHANG Yu, ZHANG Yujiao, et al. Research and application of numerical simulation of electromagnetic multi-physics fields in electrical equipment[J]. High Voltage Engineering, 2020, 46(3): 739-756.
[109] WU J, SIGMUND O, GROEN J. Topology optimization of multi-scale structures: a review[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63(3): 1455-1480.
[110] DOLTSINIS I, ZHAN K. Robust design of structures using optimization methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(23/24/25/26): 2221-2237.
[111] LI Y, YANG S, REN Z. A multi-objective topology optimization methodology using deep learning and its application to electromagnetic devices[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2024, 60(3): 1-5.
[112] ASANUMA J, DOI S, IGARASHI H. Transfer learning through deep learning: application to topology optimization of electric motor[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2020, 56(3): 1-4.
[113] LEI G, BRAMERDORFER G, LIU C, et al. Robust design optimization of electrical machines: a comparative study and space reduction strategy[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2021, 36(1): 300-313.
[114] DENG C, WANG Y, QIN C, et al. Self-directed online machine learning for topology optimization[J]. Nature Communications, 2022, 13, Article number: 388: 1-13.
[115] LI L, LIN Y, WANG Y, et al. Simulation driven AI: from artificial to actual and vice versa[J]. IEEE Intelligent Systems, 2023, 38(1): 3-8.
[116] MA Y, XU X, YAN S, et al. Extraction of interconnect parasitic capacitance matrix based on deep neural network[J]. Electronics, 2023, 12(6): 1440-1458.
[117] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 378: 686-707.
[118] 马瑶瑶. 基于深度学习的集成电路场分析和寄生电容提取研究[D]. 北京：中国科学院微电子研究所，2023.
MA Yaoyao. Research on integrated circuit field analysis and parasitic capacitor extraction based on deep learning[D]. Beijing, China: Institute of Microelectronics, Chinese Academy of Sciences, 2023.
[119] GONG Z, CHU Y, YANG S. Physics-informed neural networks for solving 2-d magnetostatic fields[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2023, 59(11): 1-5.
[120] KHAN A, LOWTHER D A. Physics informed neural networks for electromagnetic analysis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2022, 58(9): 1-4.
[121] MA Y, XU X, YAN S, et al. A preliminary study on the resolution of electro-thermal multi-physics coupling problem using physics-informed neural network (PINN)[J]. Algorithms, 2022, 15(2), 53-68.
[122] BALDAN M, BARBA P, LOWTHER D A. Physics-informed neural networks for inverse electromagnetic problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2023, 59(5): 1-5.



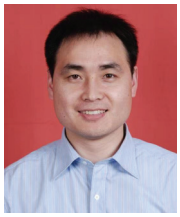
任卓翔
1957—，男，博士，教授，博导
长期从事电磁场及多物理场数值计算方法研究，致力于现代微分几何理论与电磁场数值分析相结合的理论研究以及电工设备与电子器件及系统建模仿真的应用研究
E-mail: zhxren@yahoo.com

REN Zhuoxiang
Ph.D., Professor



闫　帅(通信作者)
1986—，女，博士，副研究员，硕导
主要从事计算电磁学数值算法、模型降阶方法的研究以及自主电磁计算软件的研发工作
E-mail: yanshuai@mail.iee.ac.cn

YAN Shuai
Ph.D.
Associate professor
Corresponding author



杨　帆
1980—，男，博士，教授，博导
主要从事输变电设备多物理场计算、电力装备数字孪生方面的研究工作
E-mail: yangfan@cqu.edu.cn

YANG Fan
Ph.D., Professor

收稿日期　2024-02-28　修回日期　2024-03-14　　编辑　卫李静